Ecole Nationale Supérieure Des Télécommunications de Bretagne

Université de Rennes I

Laboratoire du Traitement du Signal et de l'Image

Diplôme d'Etudes Approfondies S.T.I.R.
Signal **T**élécommunications **I**mage **R**adar
Option Image

Rapport de stage

Segmentation d'images angiographiques par propagation de fronts dans un cadre de travail Eulérien.

Par

Stéphane Gravois

Stage effectué du 1er mars au 31 juillet 1999
au département
Image et Traitement de l'Information de l'ENSTB.
Responsables de stage : Jean José Jacq, Valérie Burdin.
Encadrant : Jean José Jacq.

SOMMAIRE.

1. Le protocole et les objectifs du stage.

11. Introduction et enjeux.

Références : [A], [B], [C], [D], [E].

12. Objectifs du stage.

Références : [1], [2], [3], [5], [6], [7], [8], [11], [12], [13], [16], [19], [30], [31], [32], [A].

2. Propagations de front, connexité, topologie et autres notions.

Références : [1], [3], [7].

3. Formulations à base d'EDP et connexions possibles.

31. EDP de propagation de front.

Références : [2], [3], [9], [10], [29], [30], [32].

32. La diffusion anisotropique.

Références : [2], [29], [30], [32].

33. Les contours actifs géodésiques et autres modèles déformables.

Références : [16], [18], [32].

4. Formulation Eulérienne.

41. Formulation Lagrangienne.

Références : [6], [7].

42. La formulation Eulérienne et ses avantages.

Références : [6], [7], [9].

5. Lois de conservation hyperbolique et équations d'Hamilton Jacobi.

51. Cadre physique lié à la formulation Eulérienne.

Références : [6], [7], [8], [12], [27], [28].

52. Notions d'entropie et de *shocks*.

Références : [2], [6], [9], [12], [15], [26], [33].

53. Le rôle de la viscosité et les solutions physiques viables.

Références : [2], [6], [7], [8], [12].

6. Schémas numériques associés et autres théorèmes.

61. Un cas particulier.

Références : [6], [7], [12].

62. La méthode de la viscosité artificielle.

Références : [6], [7].

63. Cas général en une dimension et au premier ordre.

Références : [6], [7], [11], [12].

64. Cas général avec une vitesse quelconque.

Références : [7], [11], [12], [27], [28].

65. La condition de stabilité intrinsèque dite condition CFL.

Références : [11], [12].

66. Cas spécifique à l'obtention des résultats et différents algorithmes associés.

Références :[1], [2], [6], [7], [8], [9], [12].

67. Résumé et conclusion.

7. Cadre de travail et résultats.

71. Méthodologie.

72. Le critère d'arrêt.

Références : [1], [2], [8], [12].

73. Les différentes méthodes et les résultats associés.

731. *Brute.*

Références : [6], [7], [8], [9].

732. *Narrow Band.*

Références : [8], [10], [12].

733. *Fast Marching.*

Références : [5], [12], [13], [14], [17], [19], [23].

734. *Hermès.*

Références : [19], [22], [23].

74. Conclusion.

Références : [19].

8. Les perspectives envisageables.

81. Au niveau prétraitements.

Références : [2], [30], [32].

82. Technique des bulles.

Références : [4], [9].

82. Au niveau de l'EDP utilisée et de la méthode appropriée : conclusion.

Références : [16], [17], [22].

9. Bibliographie.

REMERCIEMENTS.

Je tiens d'abord à remercier Jean José Jacq pour m'avoir fait confiance et m'avoir guidé au milieu de ce champ de bataille qu'est la profusion d'articles au sujet des équations aux dérivées partielles et de leurs applications. Je le remercie pour m'avoir fixé des étapes et des objectifs clairs, qui se sont décantés au fur et à mesure de la progression du stage, ce qui a été d'une aide non négligeable. Je le remercie enfin pour m'avoir fourni des modules et autres librairies directement exploitables pour les différents problèmes de code que j'ai pu rencontrer.

Je remercie ensuite Martial Boniou, mon collègue de DEA, pour ses nombreux conseils en informatique et son soutien en général, ce qui m'a permis de faire de gros progrès en C et dans différents logiciels dont j'ignorais même l'existence…Cela m'a permis un gain de temps précieux, en allant droit au but. Les discussions constructives que nous avons eues sur nos deux sujets complémentaires ont été enrichissantes.

Je tiens aussi à remercier le laboratoire d'accueil de mon stage, pour m'avoir fait confiance, et m'avoir fourni les moyens de progresser et d'évoluer tant en développement qu'en synthèse et recherche.

Je remercie enfin tous ceux par qui sont arrivées la bonne humeur et l'entraide dans le travail : Bahjat, Jordi, Christine, Renaud, ainsi que certains thésards avec qui j'ai pu aussi partager de très bons moments …sportifs : Jean Michel, et les autres grimpeurs du bâtiment K1.

1. Le protocole et les objectifs du stage.

11. Introduction et enjeux.

Ce paragraphe reprend la référence [A], synthèse du protocole d'étude entamé au CHU de Brest, dont les protagonistes ont *commandé* à l'ITI la partie *traitement des données brutes*. Cette introduction est nécessaire pour bien comprendre les enjeux relatifs au protocole et au stage et la relation entre les deux.

Introduction .

L'embolie pulmonaire (EP) est une pathologie fréquente à haute mortalité et morbidité. Cela en fait un problème de Santé Publique majeur. Fréquemment évoquée son diagnostic en est pourtant complexe. En effet, le choix pertinent, parmi les explorations potentielles, d'une stratégie diagnostique ne repose pas sur des bases expérimentales suffisantes. Dans ce contexte, la stratégie adoptée repose plus sur l'accessibilité des moyens et les habitudes du praticien que sur une démarche scientifique. Cette situation est éthiquement difficile à pérenniser et interdit toute politique sanitaire de répartition des moyens. Une évaluation scientifique des examens disponibles est donc une nécessité. Cette évaluation est d'autant plus justifiée que devant une suspicion d'embolie pulmonaire, le doute doit être impérativement levé : 30 % de mortalité dans les 6 mois pour les embolies non traitées est aussi inamissible que 5 % d'accidents des anticoagulants pour la même période en cas d'embolie inexistante. L'évaluation d'une technique n'est toutefois performante que dans le contexte de son intégration à l'arbre de décision (population cible, disponibilité…).
L'EP est suspectée devant un faisceau d'arguments cliniques, électrocardiographiques (ECG), anamnestiques, radiographiques (RP) et gazométriques (GDS). Seul un examen morphologique pulmonaire peut confirmer cette suspicion. L'examen de référence est l'angiographie pulmonaire qui est toutefois greffée d'une mortalité de 0.5 % et d'une morbidité de 0.6 à 1.5 %. De plus ses performances théoriques sont à moduler en fonction de la population étudiée, mais aussi des techniques (angiographie conventionnelle et angiographie numérisée, sélectivité), du matériel (matrice 512*512 ou 1024*1024 pixels) et des observateurs (de 5 à 20 % de discordances et jusqu'à 34 % lorsque les embolies sont sous segmentaires).
La recherche d'explorations moins invasives, a conduit à la pratique de scintigraphie pulmonaire de ventilation / perfusion et à l'écho-Doppler veineux des membres inférieurs. A l'issue de ces deux examens trois réponses sont possibles :

- **Le diagnostic d'EP est très probable** lorsque la scintigraphie est de forte probabilité et/ou lorsqu'une thrombose veineuse profonde (TVP) est retrouvée en écho-Doppler. Dans ce cas, le recours aux techniques invasives (angiographie pulmonaire) est inutile.
- **Une EP est très improbable** devant une scintigraphie normale, un écho-Doppler négatif et une probabilité clinique faible.
- **Dans tous les autres cas de figure**, en particulier en l'absence de TVP (30 à 60 % des patients ayant une embolie pulmonaire n'ont pas de TVP en écho-Doppler), se pose le problème des examens à mettre en œuvre pour confirmer ou infirmer l'EP. Le risque élevé de récidive, éventuellement mortelle, impose pourtant le recours à une technique diagnostique invasive lorsque la scintigraphie n'est pas contributive.

L'apparition en 1992 de l'angioscanner spiralé pulmonaire, technique peu invasive, a offert une alternative à la scintigraphie. Il a démontré son intérêt dans les embolies pulmonaires proximales mais ses performances en situation pragmatique ne sont pas validées. Chez des patients ayant une scintigraphie pulmonaire non concluante (l'existence d'une TVP à l'écho-Doppler n'a pas été prise en compte), une étude montre une sensibilité de 67 à 80 % suivant les observateurs (la sensibilité mesure la performance diagnostique d'un moyen d'observation) et une spécificité de 100 %. Une autre étude retrouve cette sensibilité dans les mêmes conditions de 44 %.

Les performances de l'angioscanner dépendent, outre de la possibilité de maintenir ou non une apnée de 20 à 25 secondes sous peine de la détérioration des performances, des techniques de traitement de l'image appliquées : reconstruction multiplanaire, à partir des représentations 3D de surface, dans l'axe des artères…

Des gains potentiels existent au niveau de ce traitement du signal, et une exploitation ciblée sur la détection de l'EP devraient permettre une amélioration sensible des performances. L'angioscanner est de plus greffée d'une morbidité faible, liée au volume d'iode injectée, mais supérieure à celle de la scintigraphie pulmonaire.

Néanmoins, pour des raisons de disponibilité tant du matériel que des praticiens compétents, il existe une centaine de centres de scintigraphie en France…,le scanner spiralé tend à remplacer en pratique la scintigraphie pulmonaire, d'autant qu'une analyse coût/efficacité serait favorable à son utilisation quelle que soit la probabilité prétest d'EP y compris le résultat d'écho-Doppler des membres inférieurs.

En 1997, les premiers résultats de dosage des D-Dimères par méthode Elisa ou Liatest, avec une forte valeur prédictive négative dans l'embolie pulmonaire, étaient présentés et remettaient en cause les démarches habituelles.

Depuis, leur dosage est devenu systématique sans que leur performances ne soient connues dans l'EP isolée sans TVP, là où est leur intérêt potentiel.

Ce nœud important de la démarche diagnostique en cas de suspicion d'EP sans TVP, doit rapidement bénéficier d'une évaluation indiscutable :

- les performances de la scintigraphie de ventilation/perfusion dans le diagnostic de l'EP sont connues depuis l'étude PIOPED(…)
- les performances en terme d'événements thromboemboliques d'une stratégie diagnostique d'élimination de l'EP, par l'association écho-Doppler des membres inférieurs et angioscanner spiralé seront évaluées par une étude multicentrique française débutant en 1998, **dont fait partie les investigateurs du CHU de Brest**.

Ces études permettront aux centres qui n'ont à disposition que l'écho-Doppler et l'angioscanner spiralé d'étalonner leur pratique.

Mais lorsque le plateau clinique disponible comprend la scintigraphie de ventilation/perfusion, le choix de la démarche diagnostique écho-Doppler et scintigraphie versus écho-Doppler et angioscanner n'est pas tranché.

La présence d'une TVP à l'écho-Doppler des membres inférieurs impose un traitement anticoagulant qui permet d'interrompre la démarche diagnostique.

Dans le cas contraire, la faible morbidité de la scintigraphie plaide pour son utilisation en première intention, mais l'angioscanner peut fournir un diagnostic alternatif et son interprétation est potentiellement améliorable par un traitement de l'image adéquat.

Objectifs du protocole et schéma d'étude associé.

Le protocole prend donc pour objectif de répondre à la question :

En face d'une suspicion d'EP avec absence de TVP à l'écho-Doppler, quel examen de première intention doit-on effectuer : une scintigraphie de ventilation/perfusion ou un angioscanner spiralé ?

L'objectif principal du protocole se ramène donc à l'étude des performances diagnostiques de l'angiographie spiralé **avant** et **après** traitement de l'image, puis comparaison avec celles de la scintigraphie pulmonaire de ventilation/perfusion.

Les objectifs secondaires du protocole sont d'évaluer la concordance topographique de la scintigraphie, de l'angioscanner et de l'angiographie, évaluer la reproductibilité et la variabilité intra et inter observateurs de l' angioscanner spiralé, avec et sans traitements de l'image, de la scintigraphie et de l'angiographie pulmonaire, évaluer la valeur prédictive négative du dosage des D-Dimères Liatest (étude satellite).

A ces objectifs correspondent du matériel et des méthodes en rapport avec le type de population étudié. Il s'agit d'un schéma d'étude prospectif, monocentrique avec comparaison en insu. Une même conduite clinique est adoptée avant et après traitement de l'image, qui consiste en un classement des différents résultats, liés à l'utilisation d'une scintigraphie et d'un angioscanner, en catégories comprenant : diagnostic d'EP, absence d'EP, et réponse non concluante. A cette dernière correspond la réalisation d'une angiographie pulmonaire et d'un traitement adapté au résultat, suivi de 6 mois.

Le schéma d'étude peut être donc être vu comme une étude statistique comparative.

En dehors de cette étude, la littérature a consacré de nombreux articles sur la comparaison des méthodes d'acquisition angiographie par plan de coupes et angiographie spiralée et les résultats diagnostiques associés, ainsi que les nouvelles techniques d'imagerie en relation avec la détection d'embolies pulmonaires (détection IRM, etc…).

Voir à ce sujet les références [B], [C] et [D].

Le paragraphe suivant insiste sur le rapport entre les données brutes obtenues et les implications au niveau du stage.

12. Objectifs du stage.

Le stage s'inscrit donc pleinement dans le protocole, puisqu'il s'agit d'une tentative d'amélioration des performances diagnostiques de l'angiographie spiralée, en effectuant un traitement adapté au style d'image rencontré. Le traitement d'image, quelque soit le type d'images rencontrées, est en soi un problème vaste et d'actualité. On comprendra donc que le traitement a tout intérêt de profiter des caractéristiques des données brutes provenant de l'acquisition par angiographie spiralée, qui diffèrent, sur certains points, de celles provenant de l'angiographie pas à pas (par plan de coupe).

Ces caractéristiques sont :

- bruit faible de type poissonnien.
- texture inexistante ou faible (dans les cas de données pulmonaires. Exemple contradictoire : le foie [25]).

- distorsions géométriques corrigées ou approximées à l'aide d'interpolation.
- **présence, fortement dépendante de certains facteurs, d'une *structure arborescente* dans l'image.**

Cette dernière caractéristique est la caractéristique essentielle du jeu de données brutes. Elle va conditionner entièrement le type de traitement choisi.

Les différences entre l'acquisition par angiographie normale (pas à pas) et l'angiographie spiralée sont :

- la taille du voxel peut être choisi dans le cas spiralé (du fait de l'acquisition en continu).
- la technique spiralée, comme on l'a dit, est moins invasive.
- le temps d'acquisition dans le cas spiralé est beaucoup moins long (30s).
- au niveau spiralé, il peut exister un problème d'asynchronisme entre l'injection du produit de contraste et l'acquisition. L'angiographie normale demeure à ce sujet l'examen de référence.
- il en résulte une stationnarité du produit de contraste dans le cas spiralé qui impose une précision importante du moment d'injection.
- il existe dans les données brutes une excellente concordance entre les deux méthodes d'acquisition jusqu'au vaisseaux du 4ème ordre.

On va essayer de profiter, dans un objectif de segmentation, de l'arborescence présente dans les données brutes. La qualité de l'arborescence dépend, comme on peut l'imaginer, de la résolution des données brutes et des facteurs liés au processus d'acquisition.

Au niveau protocolaire, on ne peut disposer en pratique que de 3 résolutions pour les données brutes spiralées suivant l'axe de la spirale (axe des z) : 2, 3 et 5 mm. Une analyse préalable des données brutes montre que la qualité de l'arborescence est fortement affectée par la taille de cette résolution. La résolution 5 mm est insuffisante car l'arborescence montre suivant l'axe des z des discontinuités trop importantes. Le mode de traitement doit tenir compte, éventuellement, de ces artefacts liés à la résolution.

En ce qui concerne le bruit et la texture, il ne constituent pas des contraintes essentielles, comparativement à celle de la résolution. L'importante complexité de la structure *arborescente* des données brutes pulmonaires implique un niveau de résolution atteint parmi les vaisseaux de toute taille. Si on peut parler de texture, il s'agit alors d'une texture naturelle induite par tout l'ensemble des vaisseaux dans les zones distales (les plus petits vaisseaux). On peut donc dire que l'arborescence est conservée jusqu'à un certain niveau de résolution.

Un tel niveau de résolution est bien meilleur dans le cas de l'angiographie pas à pas, du fait du mode d'acquisition, ce qui en fait l'examen de référence.

Alors, au regard de ces caractéristiques, quel traitement effectuer ?

L'objectif du traitement ici se ramène à un problème de visualisation : il s'agit de faire usage de *toute* l'information disponible dans les données brutes, et la rendre pertinente pour le spécialiste (le radiologue) qui doit pouvoir grâce à cela, améliorer son diagnostic, et détecter par exemple une EP après traitement alors qu'avec les données brutes, aucune suspicion n'est déclarée. Il s'agit donc de rendre plus lisible l'information, avec la contrainte fondamentale de ne pas en rajouter !

Le spécialiste, habituellement, procède par lecture sur les différents plans de coupe 2D (axe x-y), et détecte l'embolie en observant que la partie de l'arborescence issue de l'embolie a disparu, puisque le produit de contraste ne passe plus.
Sans revenir sur les avantages inhérents à la visualisation 3D, une idée intuitive, pour se subsituer à cet examen du spécialiste, consiste à remplir les poumons (les données brutes..) d'un liquide qui aura pour effet de labelliser les zones rencontrées *intérieur* et les autres *extérieur*.
Cela définit une segmentation, et permet les étapes suivantes que sont les problèmes de visualisation 3D (rendu surfacique, rendu volumique, etc…).

Objectifs du stage et plan.

Le stage n'est qu'une étape visant le but final de la représentation en 3D d'une angiographie spiralée (l'extension à d'autres types de données : IRM, angiographie normale,… est possible).
Il aura pour but global de tester une méthode de segmentation par propagation de front. Pour cela, on se base sur l'hypothèse de la présence d'une arborescence dans l'image : le liquide (le front) va remplir le réseau vasculaire. On veut donner au front le comportement d'un liquide visqueux (le front est la frontière du liquide), qui puisse ignorer dans une certaine mesure les *trous* présents dans les vaisseaux.
La formulation physique de cette propagation va de ce fait utiliser le concept d'EDP.
Dans un premier temps, après avoir revisité quelques notions relatives à la topologie et aux graphes, la notion d'EDP sera donc introduite ainsi que les connexions possibles.
Cela permettra au stage de se situer dans un cadre particulier de travail appelée formulation Eulérienne, pour lequel il existe des avantages dans le maniement topologique des formes (fronts, surfaces, etc…). Différents algorithmes seront alors utilisés, provenant de cette formulation, et on pourra alors tester l'un d'eux sur des images médicales.
La comparaison des différents algorithmes sera par ailleurs pertinente pour mettre en valeur les différentes notions topologiques qui auront été introduites.
En outre, c'est de cette comparaison que l'on pourra situer les enjeux actuels en traitement d'images (analyse multi échelle, détection d'objets en mouvement, rapidité associée, etc…)
Des images angiographiques 2D du réseau vasculaire cardiaque ont été volontairement choisies pour le test au niveau segmentation, ceci d'abord parce qu'elles constituent un test plus sévère que les données pulmonaires (diffusion du produit de contraste, d'où artefacts dans l'image du gradient, etc..), ensuite parce que l'hypothèse de base de la présence d'une arborescence est respectée, enfin parce que le travail en 2D s'avère plus rapide et plus simple dans un premier temps que le 3D.
Sur ce dernier point, on verra que l'extension au 3D est facilitée par l'utilisation de la formulation Eulérienne, ce qui en fait un avantage parmi d'autres.
Pour terminer, on établira la connexion avec un type de prétraitement appelé diffusion anisotropique, connexion très directe puisqu'elle utilisera l'EDP liée à la propagation de front, moyennant certaines hypothèses que nous verrons.
Cette connexion avec un prétraitement de type non linéaire situera les limites de l'EDP utilisée pour la propagation du front (limites du traitement + prétraitement) dans l'objectif de segmentation précité.

2. Propagations de front, connexité, topologie et autres notions.

Ce court chapitre reprend essentiellement quelques définitions de la référence [1] pour situer le problème de propagation de front relativement à des notions de topologie. Il n'a pas pour but de se substituer à [1]. De plus, il est au maximum illustré afin d'éviter des discours trop longs. Pour tous renseignements complémentaires, voir cette référence.

Déf. : *Graphe des pixels (ou voxels).*

La grille des pixels correspond au domaine de définition d'une image numérique et découle d'un échantillonnage régulier. La grille d'échantillonnage s'appelle trame. Les échantillons correspondent aux valeurs numériques de l'image.
Le graphe des pixels est la réunion de deux ensembles :

- l'ensemble des sommets de la trame = les sommets du graphe.
- l'ensemble des arêtes construites à partir des sommets et d'une relation de voisinage.

Déf. : *Connexité, voisinage, composantes connexes.*

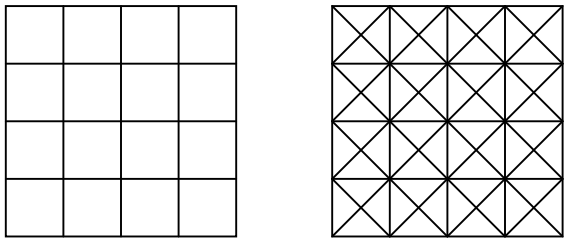


Fig. 1. Arêtes implicitement définies par une trame 2D en 4-connexité et 8-connexité respectivement.

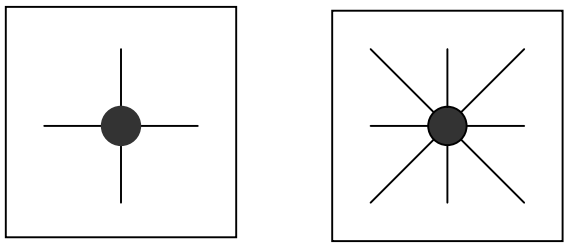


Fig. 2. Type de voisinage défini par le 4-connexité et le 8-connexité (pour une trame 2D) respectivement.

Du fait que la grille des pixels est régulière et symétrique, les ambiguïtés sur le type de voisinage soient levées:

- en 2D, on a le 4- et le 8-connexité.
- en 3D, on a le 6-, le 18-, et le 26-connexité.

De ces définitions découlent celles d'ensembles connexes ou composantes connexes (la définition utilise la notion de chemin). Les opérations d'érosions et de dilatations morphologiques deviennent possibles à partir de ces définitions. Tous les algorithmes développés durant le stage utilisent le voisinage 4-connexité.

Déf. : *Espace géodésique, chemin et distance.*

Un espace géodésique est un espace de travail dans lequel une partie est interdite. La partie non interdite s'appelle espace contraint. Un espace contraint ou interdit peut être composé d'une ou plusieurs composantes connexes. Un chemin de longueur n est un (n+1)-uplet de sommets liés par une relation de voisinage.

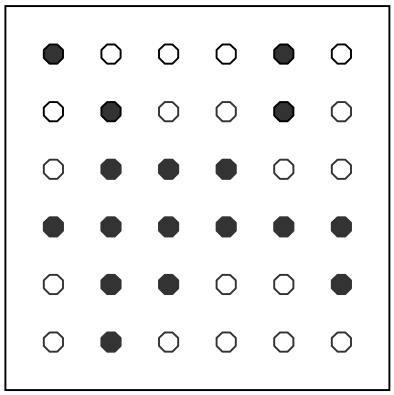


Fig. 3. Espace géodésique défini par un espace contraint (une composante connexe en 8-connexité), et un espace interdit (trois composantes connexes en 8-connexité).

La distance discrète entre deux sommets est la longueur du plus court chemin les joignant. La distance Euclidienne suppose un espace complètement convexe car elle traite des vecteurs.

Déf. : *Carte distance.*

A partir d'un espace géodésique, on peut définir la distance géodésique discrète comme la longueur minimale de tous les chemins d'un sommet à un autre dans l'espace contraint. Par exemple, la distance géodésique discrète maximale sur l'espace contraint de la figure 3 est égale à 6. L'espace de cette figure n'étant pas convexe, on ne peut utiliser la distance Euclidienne. En particulier, le calcul de distance Euclidienne sur la surface d'une forme n'a pas de sens, ou n'a pas d'intérêt. On se réfère alors, pour ce genre de problèmes, à la distance géodésique.
La carte distance à un ensemble de sommets associe à tous sommets d'une grille de pixels la distance (géodésique ou non, discrète ou non) à cet ensemble de sommets. A la différence d'une distance Euclidienne, la distance discrète n'est qu'une approximation de la distance Euclidienne, approximation effectuée grâce à la métrique du chanfrein, qui n'utilise que des valeurs entières, ce qui est bien utile sur le plan algorithmique. La métrique octogonale sous jacente permet de se rapprocher au mieux en 8-connexité de la distance Euclidienne.
Le fait d'utiliser une valuation (discrète pour la définition d'une image numérique) pour les sommets du graphe induit la définition de graphe morphologique. On peut alors extrapoler les définitions précédentes au graphe morphologique. On raisonne alors sur un espace discret 3D.
On peut voir qu'une image numérique 2D ou 3D représente un espace de travail convexe et simplement connexe, auquel cas on peut utiliser la distance Euclidienne. Des algorithmes efficaces existent alors pour obtenir la distance Euclidienne exacte à partir d'une métrique de chanfrein.
Dans la suite de l'exposé, on n'utilisera que des cartes distances Euclidienne.

6	6	6	6	5	4	4	3	2	1	0	1	2
5	5	5	5	4	3	3	2	1	1	0	1	2
4	4	4	4	3	2	2	1	0	0	0	1	2
3	3	3	3	2	1	1	0	1	1	1	2	3
2	2	2	2	1	0	0	0	1	2	2	3	4
1	1	1	1	1	0	1	1	2	3	3	4	5
0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	5	6
1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	5	6	7

Fig. 4. Exemple de carte distance discrète en 4-connexité depuis un ensemble de sommets labellisés 0 (distance nulle) utilisant un voisinage 8-connexité. Chaque chiffre indique la longueur du chemin minimal joignant le sommet à l'ensemble des sommets 0. Pour obtenir la distance Euclidienne exacte, on voit bien qu'il ne s'agit pas simplement de prendre directement la distance discrète. On doit en plus tenir compte de l'information vectorielle attachée au sommet (combien d'arêtes horizontales et d'arêtes verticales composent le chemin de longueur minimale ??).

Déf. : *Principe de construction de Huygens, propagation de front.*

Supposons l'existence en 2D d'une composante connexe en 4- ou 8-connexité. Considérons tous les voisins de tous les éléments de celle-ci, pour ce type de voisinage, qui n'appartiennent pas à la composante connexe. Alors cette opération s'appelle principe de construction de Huygens. On peut voir qu'elle est équivalente à une dilatation morphologique avec un élément structurant du même type que le système de voisinage (donc de taille 1 pixel). Elle est également équivalente à l'obtention de la distance 1 sur la figure 4, en partant de la composante connexe définie par tous les sommets distance nulle.

Par construction de Huygens, on est sûr ainsi de traiter tous les sommets lors de la propagation de la construction. On peut constater par ailleurs que cette opération permet la propagation d'un *front* à vitesse constante égale à 1. Cela est aussi appelé advection linéaire dans les graphes. La connexité du front dans le cas discret peut donc apparaître a priori comme la base pour une définition du front. Une définition possible est alors la suivante dans le cas discret :

Déf. : un *front* est un chemin dont les sommets possèdent au maximum deux voisins.

Dans le cas continu, la propagation d'un front (ainsi que sa définition) peut être vue d'une tout autre manière. On utilise pour cela la notion de vitesse sur la normale en tous points, le front étant vu comme une courbe en 2D et une surface en 3D (ouverte ou fermée). La vitesse peut prendre n'importe quelles valeurs.

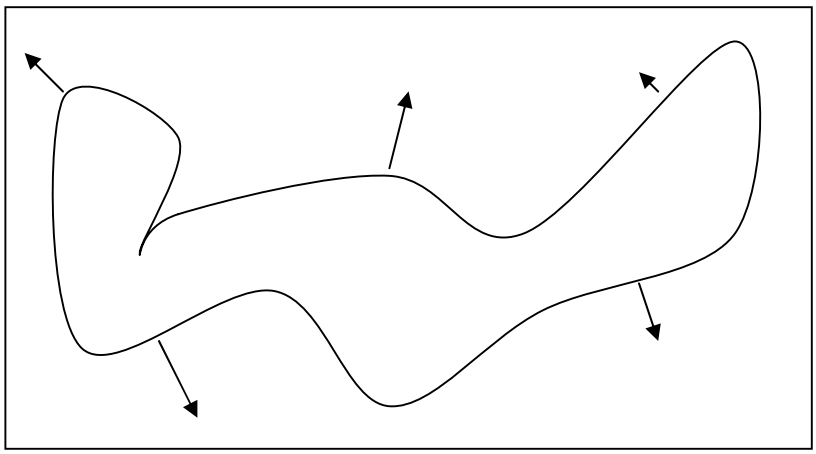


Fig. 5. Les flèches représentent (la normale*la vitesse) en des sommets particuliers du front. La propagation du front est induite par la vitesse en tous sommets suivant la normale.

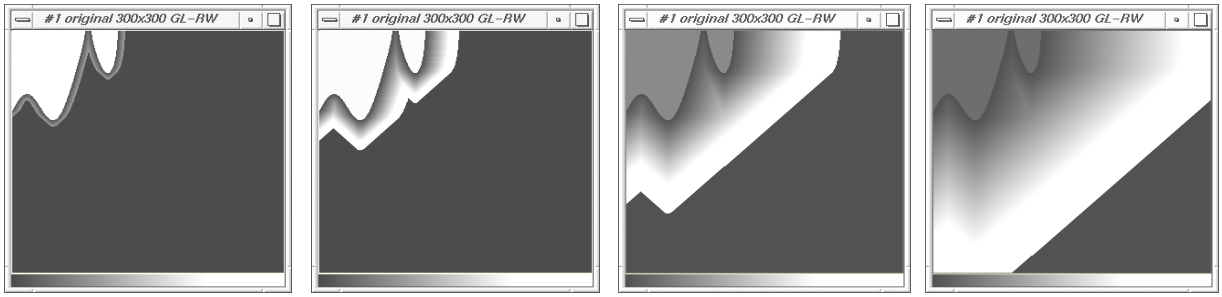


Fig. 6. Propagation de front basée sur le principe de construction de Huygens, à partir d'une composante connexe (en blanc), en utilisant un voisinage 4-connexité. On peut remarquer que le front prend une forme déterminée par le type de voisinage utilisé.

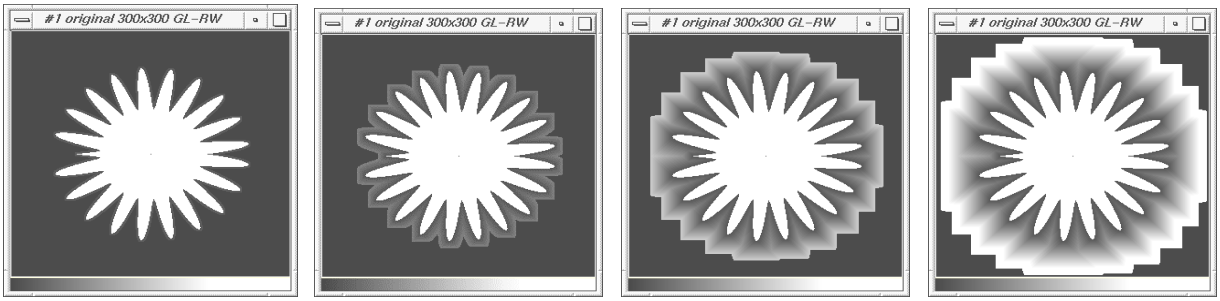


Fig. 7. Propagation de front basée sur le principe de construction de Huygens, à partir d'une composante connexe (en blanc), en utilisant un voisinage 8-connexité. On peut remarquer que le front prend une forme déterminée par le type de voisinage utilisé.

Algorithmes :

A partir de ces définitions, il est possible d'établir un lien entre la notion de carte distance et la propagation de front.

On peut effectivement constater que la carte distance à une forme initiale (un front : une courbe, une surface, la frontière d'une forme, etc…) constitue la source d'information privilégiée pour établir une propagation de fronts.

Dans un soucis de précision et dès que cela devient possible, il est souhaitable d'obtenir, à partir d'un front initial, sa carte distance Euclidienne exacte.

Inversement, pour bâtir une carte distance, on peut se baser sur la propagation de fronts !

Construire la carte distance discrète à un front initial est extrêmement simple : il suffit de respecter le principe de construction de Huygens sur le plan algorithmique.

En ce qui concerne la distance Euclidienne, il se pose le problème de l'optimalité de l'algorithme utilisé, car on peut procéder de deux façons :

- on procède par balayage séquentiel (avec ou sans masques), c'est à dire que pour chaque sommet, on regarde quel est le sommet le plus proche sur le front et on calcule ainsi la distance. Cette solution est à proscrire car extrêmement coûteuse en calcul !
- on utilise un algorithme particulier de propagation de front.

Cette dernière solution, optimale, est celle qui a été implémentée dans tous les algorithmes.

De quoi s'agit-il ?

On utilise un système de piles qui possèdent un index : on a un tableau de piles.

Par construction de Huygens, on remplit les piles des informations indispensables sur le sommet traité (coordonnées), l'index de la pile étant égale au carré de la distance discrète trouvée. Par cette astuce, on remet à jour (en traitant les piles par ordre croissant des index) la donnée distance Euclidienne trouvée sur le sommet. Il est démontré que cet algorithme aboutit à la carte distance Euclidienne exacte à un front (ou toute composante connexe) initial(e).

Cet algorithme est optimal au sens de la vitesse d'exécution : la carte distance est trouvée très rapidement. Cette solution est incomparablement plus rapide que le balayage séquentiel.

A partir d'un telle carte distance, il est déjà possible alors de trouver des solutions en traitement d'image de type segmentation, basées sur la propagation de fronts par advection linéaire dans des bassins versants (ligne de partage des eaux) et la recherche de squelette par zone d'influence (SKIZ). A ce sujet, voir la référence [1].

La séquence suivante montre le résultat d'un algorithme personnel, tentative d'obtention d'une carte distance Euclidienne, sans utiliser un système de piles indexées par le carré de la distance discrète mais en utilisant une seule pile. Cet algorithme fonctionne pour des cartes distances à des composantes connexes convexes, moyennant en plus une hypothèse très forte sur la distribution des sommets de la frontière de la composante connexe (la seule forme vérifiant ces conditions est un carré…). Il avorte dès qu'il s'agit de traiter des composantes non convexes, ou dès que l'hypothèse précédente n'est plus respectée. Cependant, l'affichage a l'intérêt de montrer à la fois une propagation en 4-connexité et la construction de la carte distance Euclidienne.

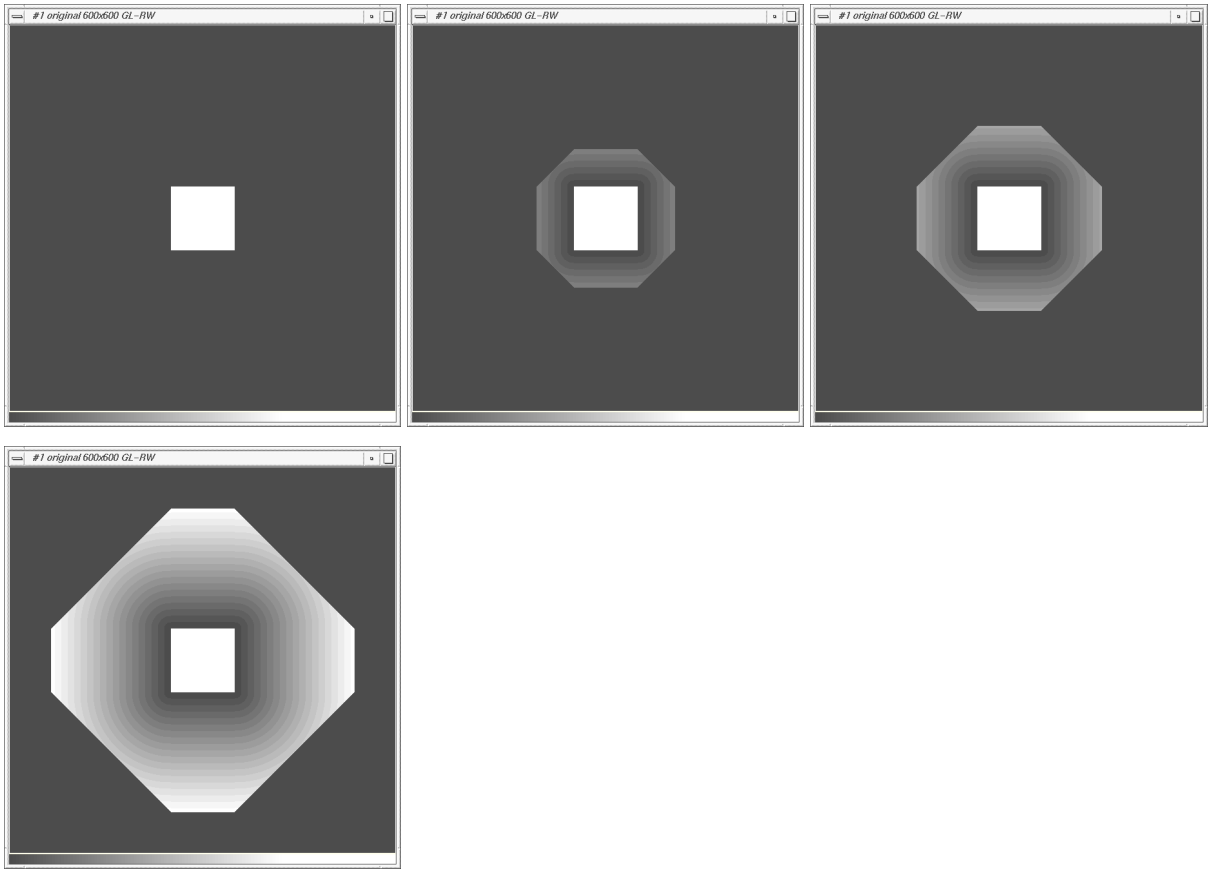


Fig. 8. Algorithme personnel basé sur le principe de construction de Huygens, à partir d'une composante connexe carré et en 4-connexité. Propagation simultanée d'une information de type distance Euclidienne. L'affichage met en évidence la distance quantifiée par intervalles de 20.

3. Formulations à base d'EDP et connexions possibles.

-

31. EDP et propagation de fronts.

Rappelons rapidement la problématique de départ concernant la segmentation de données angiographiques 3D.
On veut profiter, dans un objectif de segmentation, de certaines caractéristiques des données brutes.
En particulier, outre l'absence ou le peu de textures, la présence d'une arborescence dans l'image, qui en constitue la caractéristique essentielle. Les données brutes souffrant de contraintes liées au mode d'acquisition, par exemple, la voxellisation inhérente à toute image numérique 3D avec une contrainte plus forte sur l'axe des z, il faut en tenir compte dans le protocole de traitement, qui a pour objectif final la visualisation en 3D des zones d'intérêt.
La discontinuité des données entre chaque plan de coupe peut donc être vue comme une contrainte.
Une idée sous jacente à ces caractéristiques, provenant des modèles déformables, est de propager un front connexe à l'intérieur de cette structure arborescente en tenant compte de l'information disponible.
Le but du ou des prétraitements, quant à eux, est de rendre cette information pertinente, sans la détériorer.
Des méthodes ou modèles déformables ont déjà été utilisées en vue de segmentation.
Ils ont été appliqués sur les images 2D en fin de rapport. On pourra citer certains travaux de thèses en Bretagne, comme par exemple la méthode des suivis de contours (ITI) ou encore des méthodes vectorielles (LTSI).
Le point de départ concerne donc l'utilisation de front(s) connexe(s) évoluant sur la grille des pixels.
On cherche à atteindre la topologie de la structure en arrêtant le front sur les contours ou structures d'intérêt.
Le front peut posséder certaines propriétés intrinsèques que nous détaillerons.
Il peut posséder également des propriétés indépendantes ou extrinsèques [2], [12]. Ces propriétés, incluses dans la forme de la vitesse, guident donc son comportement par rapport à des types très différents de données : information présente dans l'image, propriétés géométriques du front, etc…

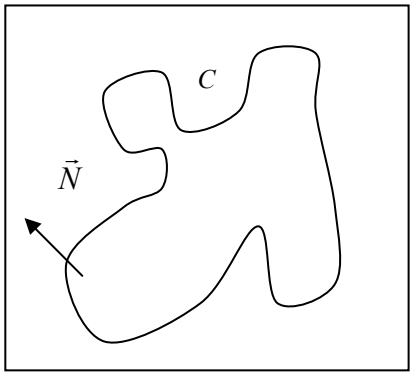


Fig. 9. Représentation en 2D d'une courbe fermée, front en propagation, contour éventuel d'une forme, et de la normale en un point particulier.

Le front en 2D est régi par l'EDP [1] [2] [3] [12] :

$$\frac{dC}{dt} = vitesse(s,t)\vec{N} \tag{1}$$

N représente la normale au front, et contient implicitement les dérivées spatiales.

On doit légitimement se donner une condition initiale sur le front, souvent notée :

$$C(s,t=0)=C_0(s)$$

Ce modèle montre une dépendance à l'abscisse curviligne.

On verra qu'il n'est pas souhaitable de faire intervenir l'abscisse curviligne dans n'importe quel modèle [6] [12] car cela fait appel à un attribut local, ou plus explicitement un système de coordonnées non fixe, ce qui engendre des instabilités pour les approximations numériques et aussi des difficultés à gérer les changements de topologie. De manière très générale, on veillera à séparer ca qui appartient au domaine continu, et ce qui émane du domaine discret. Certains théorèmes donnés dans le cas continu voient leur vérification non aisée dans le cas discret [2] [3].

En outre, il sera bon de distinguer dans les EDP le domaine d'application de celles-ci. L'équation (1) ne dit rien sur les points n'appartenant pas à la courbe, bien qu'ils peuvent intervenir dans les approximations numériques : on se contente de la propagation d'une courbe. On verra qu'il peut exister en matière de propagation une contradiction entre le concept de courbe et de forme (vue comme l'intérieur de la courbe par exemple) sur le plan topologique et que la gestion des singularités est nettement simplifiée dès que l'on traite des formes [33].

Dans cette optique, on cherche à reformuler la même EDP sur un domaine de données plus étendu, en l'occurrence R^n (l'espace borné de l'image en entier dans le cas discret). L'idée est d'envelopper le front dans un ensemble de données dont on pourra tirer des propriétés intéressantes à partir de certaines hypothèses.

Supposons que l'on fasse correspondre à la courbe *(C)* une représentation implicite donnée par une courbe de niveau $u(x, y,.., t) = 0 = \Gamma(x, y, ..,t) = \Gamma_t$ au sein d'une image de distance signée $u(x, y,..,0) = u_0(x, y,..)$, qui possède les propriétés fondamentales à l'initialisation d'une surface paramétrée (illustration suivante) [12]:

$$u_0(x,y,..,0)=\pm dist(\Gamma_0)$$

Fig. 10.
Une *courbe* et la carte distance associée. Dans les applications de propagations de front à base d'EDP, l'obtention d'une carte distance signée initiale est une hypothèse forte. Le signe de la carte distance donne par convention le sens de propagation associée aux paramètres de la vitesse.

Du fait que le vecteur normal à la courbe est parallèle au vecteur gradient ∇u, et que la carte distance donne l'information implicite sur l'évolution de la propagation, l'EDP (1) peut être réécrite sous la forme [1] [6] [12]:

$$u_t=\beta|\nabla u| \qquad (2)$$

Cette équation, très connue en mécanique des fluides, est aussi appelée équation d'Hamilton Jacobi (bien que les équations d' HJ aient un domaine de définition plus large). Elle sera vue plus en détail dans les parties suivantes. Le problème pour ce genre d'équation portent sur l'existence, l'unicité et la régularité des solutions.

Le paramètre β , qui a la dimension d'une vitesse et peut prendre a priori n'importe quelle forme, peut en outre contenir elle même des dérivées, mais sous la dépendance de cette EDP, la paramétrisation par l'abscisse curviligne perd de son sens car le niveau 0, arbitraire, définissant le front, (arbitraire car on peut prendre le niveau qu'on veut pour définir le front…), a le sens d'une courbe de niveau sur la surface paramétrée précédemment citée.

Cette approche est radicalement différente d'une propagation utilisant les propriétés classiques de voisinage et de connexité car le critère d'évolution porte sur un ensemble « volumique » de pixels et non sur une frontière de pixels possédant des contraintes de connexité et sur lesquels s'opèrent en général les calculs à base d'abscisse curviligne.

Une forme peut alors être définie par l'ensemble des points pour lesquels la valeur de u est comprise entre deux valeurs arbitraires, par exemple 0 et $-\infty$:

$$forme(t) = \{u(x, y,.., t) \mid -\infty < u(x, y,.., t) < 0\}$$

β, possède son propre domaine de dépendances, et très souvent, dans un objectif de segmentation, elle prend la forme suivante :

$$u_t = g(I)(\beta_0 - \beta_1 k)|\nabla u| \tag{3}$$

g(I) est une fonction de l'information présente dans l'image.

β_0 définit la constante de réaction (ou d'advection si on reprend la terminologie du chapitre précédent).

β_1 définit la constante de diffusion.

$\beta_1 k$ représente alors le terme de viscosité.

Ces deux constantes définissent l'espace de réaction /diffusion et induisent un comportement plus ou moins visqueux sur le front (mais pas seulement le front mais tout l'espace enchâssant le niveau 0 des courbes de niveau).

La formulation (2), aussi appelée formulation Eulérienne, possède de nombreux autres avantages sur lesquels nous reviendrons dans le chapitre suivant.

Néanmoins, pour mémoire et avant de passer à celui ci, on peut rappeler quelques formules avantageuses provenant de l'accès au système fixe de coordonnées et de la donnée d'une carte distance [6] [7] [8] [12].

$$\vec{N} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \tag{3'}$$

$$k = div(\vec{N}) = div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \tag{3''}$$

k , représente la courbure locale déduite des données *u(x, y,.., t)*.

$$|\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{1/2}} \tag{3'''}$$

On constate d'emblée que la donnée de la courbure implique le calcul de dérivées au second ordre.

En redistribuant ces formules dans l'équation (2), on obtient :

$$u_t = -\beta_1 . g(I) . div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) . |\nabla u| + \beta_0 . g(I) . |\nabla u| \tag{4}$$

Cette EDP sera largement discutée lors des approximations numériques visant à établir une bonne expression pour la norme du gradient. Il est bon de noter que dans l'état initial où la fonction courbe de niveaux u est la carte distance à u_0=0 , on a :

$$|\nabla u| = 1 \tag{5}$$

Mais à tout autre instant, la solution de l'équation (2), au regard de la vitesse, n'est pas en général une carte distance (signée), et cela peut poser un certain nombre de problèmes relatifs à la possibilité et l'unicité de solutions pour l'équation générale (2) d'Hamilton Jacobi, laquelle ne préserve donc pas la carte distance.

Des résultats récents ayant pour but de trouver une EDP préservant la carte distance ont abouti à cette équation (qui n'est pas une équation d'Hamilton Jacobi à cause de la présence explicite de u dans la partie droite) :

$$u_t = \beta(x - u\nabla u) \tag{6}$$

où x est un point quelconque de l'espace paramétré.

Une discussion est d'actualité [2] [9] [10] [14] [17] [21], portant sur l'évolution de la carte distance lors de l'évolution de l'équation (3) et de regarder objectivement quels sont les écarts ou instabilités apparaissant dans les *courbes de niveaux* par rapport à une carte distance idéale. Celle-ci permettrait, si elle existait en permanence, de s'affranchir des approximations et de prendre toujours la relation (5) (cas continu).

Il est sûr que l'effet de la viscosité joue un grand rôle dans le lissage et l'annihilation de ces instabilités.

En particulier, l'équation de propagation de la chaleur, qui est un cas particulier de (3) avec une composante de diffusion uniquement, connecte directement avec le filtrage gaussien et l'analyse multi échelle (cf. page suivante).

Les connexions avec d'autres concepts plus ou moins récents en traitement d'image sont aisées par la formulation à base d'EDP, car on peut s'affranchir de définir arbitrairement une carte distance pour les données *u(x,y,..,0)* et la remplacer par tous types de données, comme par exemple les niveaux de gris de l'image.

32. La diffusion anisotropique.

Des théorèmes absolument intéressant établissent la connexion mathématique entre l'évolution d'une EDP (typiquement dans l'espace de réaction /diffusion) sur une carte distance et l'évolution sur les isointensités d'une image à niveaux de gris [2] [29].

Une reformulation du problème permet alors de se ramener au cas du filtrage par diffusion anisotropique. Les lignes suivantes sont consacrées à différents modèles d'EDP visant à établir une diffusion anisotropique sur l'image, en partant de l'équation de propagation de la chaleur.

Une approche classique développée dans le domaine de la restauration des images utilise une opération de convolution linéaire afin de réduire le bruit, considéré comme un signal haute fréquence :

$$u(x_1, x_2, .., t) = \int_{\Re^n} opérateur(x_1 - i, x_2 - j, .., t) u_0(i, j, ..) d\Omega,$$

$$d\Omega = dx_1 dx_2 ... dx_n$$

u_0 , représente par exemple l'image originale bruitée.

Un exemple d'opérateur souvent utilisé pour ses performances et ses propriétés est l'opérateur Gaussien G donné par (dans le cas 2D) :

$$G(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Cet opérateur possède la propriété d'invariance par translation, ce qui le différencie des opérateurs anisotropiques, qui eux, ne sont pas invariants. Il est alors montré que la convolution par ce noyau Gaussien est équivalent à un processus de diffusion de durée $t = \sigma^2/2$. Cette équation de diffusion, connue sous le nom d'équation de propagation de la chaleur, peut se mettre sous la forme de l'EDP parabolique linéaire suivante :

$$u_t = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) \ ,$$

qui est strictement équivalente à :

$$u_t = div(\nabla u) \tag{7}$$

Ceci définit une diffusion isotropique.

On ne peut pas interpréter a priori (7) comme un cas particulier de (4)_d'où serait absente g(I), avec en entrée une image, un coefficient de réaction nul, et en utilisant l'équation (5)_, car le fait qu'on traite une image implique que (5) est faux dans l'absolu. Mais attention, malgré tout, (remarques précédentes) la distribution des gradients dans une image quelconque u fait que la normale aux isointensités de celle-ci est approximativement (strictement dans le cas continu) parallèle au gradient de u : cela provient du fait que deux isointensités ne se croisent jamais, et qu'une image définit une surface paramétrée.

En pratique, ce constat est limité par la présence de bruit bien que l'effet de lissage induit par la diffusion réduise le bruit.

L'équation (7) possède quelques limitations coïncidant avec celles des filtres linéaires classiques : la réduction du bruit se fait au prix d'un réhaussement du flou dans les zones de forts gradients.

D'où l'idée de rendre le filtre anisotropique en incluant dans l'EDP une dépendance au gradient sous la forme d'une fonction *c(x, y, t)* strictement décroissante, tendant vers 0 à l'infini :

$$u_t = div(c(x,y,t)\nabla u) = c(x,y,t)\Delta u + \nabla c \nabla u \tag{8}$$

En introduisant ce type de dépendance, on privilégie la diffusion dans les zones à faibles gradients et l'inverse dans les zones à forts gradients, en mettant arbitrairement :

$c = 0$ aux frontières.

$c = 1$ ailleurs.

Le problème inhérent à cette première tentative de diffusion anisotropique réside dans la définition des frontières ! L'approche proposée par Perona et Malik consiste à mettre le gradient dans c, où c est cette fois-ci une fonction quelconque avec l'hypothèse strictement décroissante, tendant vers 0 à l'infini :

$$u_t = div(c(|\nabla u|)\nabla u) \tag{9}$$

En conséquence : les régions de faible gradients sont filtrées, les régions convergent au cours du processus vers des régions d'intensité constante.

Ce modèle possède en outre trois limitations principales : le bruit introduit de larges oscillations du gradient, on a aussi un renforcement des frontières de bruit s'il y a convergence par exemple dans les régions de gradients moyens, ainsi qu'un problème théorique au niveau de l'existence de solutions pour (9).

Ce qui induit la nécessité d'un premier préfiltrage et peut être perçu comme un défaut.

Catté ont remédié à ces limitations en proposant ce premier filtrage de type Gaussien :

$$u_t = div(c(|\nabla G_\sigma * u(x,y,t)|)\nabla u) \tag{10}$$

Ce schéma conduit à l'existence, l'unicité et la régularité des solutions, en particulier elle comporte une et une seule solution visqueuse (cf. chapitre 3 et 4), et les limitations de (9) sont évitées.

Par contre, la stabilité n'est pas garantie quand σ tend vers 0. D'autres schémas plus récents existent, et établissent la connexion avec un cas particulier de (4) (réaction nulle, diffusion = -1) :

$$u_t = |\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) \tag{11}$$

Alvarez proposent pour cette connexion :

$$u_t = (c(|\nabla G_\sigma * u(x,y,t)|)) . |\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) \tag{12}$$

La connexion a un sens pour *c(.) = 1*.

Les caractéristiques intéressantes de cette équation sont :

- la déformation par courbure préserve les frontières tout en éliminant le bruit.
- les régions convergent grâce à *c(x, y, t)* vers des zones intensité homogène.

Par ailleurs, dans tout ce qui a été dit, il faut veiller à ne pas confondre *équation de propagation de la chaleur* , qui prend en compte les deux dérivées spatiales de second ordre u_{xx} et u_{yy}, respectivement dérivée seconde sur l'axe du gradient et dérivée seconde suivant l'axe perpendiculaire, *et déformation par courbure*, qui prend en compte seulement u_{xx} du fait de la donnée d'une carte distance [2] [32].

Quelques théorèmes et des résultats concrets seront discutés plus tard, en effectuant une analyse multi échelle avec un opérateur particulier, ceci dans une fin de prétraitement [2] [30] [32]. Des connexions existent également avec le *snake*, qui, reformulé sous la houlette de la méthode des *courbes de niveaux*, semble constituer la pierre angulaire de la continuité du stage [16] [18] [32].

33. Les contours actifs géodésiques et autres modèles déformables.

L'opportunité de coupler un modèle de type minimisation d'énergie avec la propagation de fronts est une base forte pour enrichir le comportement du front [16].

Rappelons que le *snake* correspond à la minimisation d'une fonction d'énergie d'une courbe paramétrée (en 2D) *E(C) :*

$$E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |C''(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I(C(q))| dq \tag{12'}$$

où α, β, λ sont des constantes réelles positives.

Les deux premiers termes correspondent à l'énergie interne et contrôlent la régularité du contour. Le troisième correspond à l'énergie externe en induisant un comportement du contour de type attraction dans un puit d'énergie (*détecteur de frontières*).

Le *snake*, ainsi défini, possède des limitations : on ne peut détecter deux objets en même temps du fait que le contour doit préserver son intégrité. Ce défaut correspond donc à une limitation dans les manœuvrements topologiques. Ensuite se pose le problème du choix des paramètres α, β, λ.

Pour plusieurs raisons que l'on trouvera dans la référence [16], le coefficient β peut être éliminé sans que le contour ne perde de ses propriétés intéressantes. En remplaçant $-|\nabla I|$ par $g(|\nabla I|)^2$, où $g(.)$ est une fonction décroissante tendant vers 0 à l'infini, (12') peut être mis sous la forme :

$$E(C) = \alpha \int_0^1 \left|C^{'}(q)\right|^2 dq + \lambda \int_0^1 g(\left|\nabla I(C(q))\right|)^2 dq = \int_0^1 (E_{\text{int}}(C(q)) + E_{ext}(C(q)))dq$$

Moyennant certaines hypothèses, il est montré que ce modèle est équivalent à :

$$Min \int_0^1 g(\left|\nabla I(C(q))\right|).\left|C^{'}(q)\right| dq$$

Le problème de minimisation de (12') a été transformé en un problème de recherche de chemin géodésique dans un espace de Riemann, suivant une nouvelle métrique.

Alors, cette nouvelle écriture peut bénéficier des avantages de la formulation par EDP, pour aboutir à un modèle appelé contours actifs géodésiques :

$$\frac{dC}{dt} = g(I)k\vec{N} - (\nabla g.\vec{N})\vec{N}$$

En pratique, ce modèle minimise la longueur du contour, en tenant compte des informations sur l'image I et de la nouvelle métrique. Cette longueur s'écrit :

$$L = \int_0^{L(C)} g(\left|\nabla I(C(q))\right|)ds$$

A présent, il s'agit d'enchâsser cette nouvelle représentation par EDP dans une formulation par *courbes de niveaux*.

Ceci se fait en assumant que le contour initial est le lieu du niveau 0 de la fonction *courbes de niveaux*.

En reprenant l'équation (2) (formulation Eulérienne), et en remplaçant la normale N par la norme du module du gradient, on obtient la formulation Eulérienne suivante pour un problème de type contours actifs géodésiques :

$$u_t = g(I)\left|\nabla u\right|k + \nabla g(I).\nabla u$$

où k représente la courbure moyenne locale.

Sans aller plus loin, on voit bien qu'une approche de type *snake* peut être reformulée dans un cadre de travail dont nous allons voir dans le prochain chapitre et les suivants qu'il permet ce que ne permettait pas le *snake* original formulé par l'équation (12') : le manœuvrement topologique aisé.

Pour tout renseignement complémentaire, consulter les références [16], [17], [18], [22] et [23].

On peut ainsi découvrir une extension au cas 3D en considérant des surfaces géodésiques.

Et dans les deux dernières références citées, l'extension est faite au cas de détection de régions par propagation *Eulérienne* de *snake* en considérant des modèles statistiques pour les textures.

4. Formulation Eulérienne.

41. Formulation Lagrangienne.

Cette courte section a pour objectif de rappeler les enjeux concernant l'abandon de la formulation Lagrangienne au profit de la formulation Eulérienne.

On rappelle que la formulation Lagrangienne pour les courbes et les surfaces est une représentation paramétrique basée sur l'abscisse curviligne. Les résultats émanent donc d'une intégration *le long* de la courbe ou de la surface, la conséquence en est que le système de coordonnées bouge avec le front. Sous sa forme usuelle, une telle représentation de ces formes paramétrées, incluant la composante temporelle, est :

$$C(s,t) = \{x(s,t) = [x_1(s,t), x_2(s,t), ...]\}, \qquad C_0(s) = C(s, t = 0)$$

où s est homogène à une abscisse curviligne.

Les points faibles de cette formulation apparaissent dès qu'il s'agit d'avoir accès à une analyse au premier ordre et aux ordres supérieurs lors du calcul et de l'approximation numérique de quantités telle que la courbure, la variation totale, etc…, quand cette représentation est soumise à une EDP de type (1). En 2D, on a :

$$x_t = \beta k \left(\frac{y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{1/2}} \right)$$

$$y_t = \beta k \left(\frac{x_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{1/2}} \right)$$

La courbure k est donnée par :

$$k = \frac{y_{ss} x_s - x_{ss} y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{3/2}}$$

En utilisant les différences finies, il est possible de découper le front de propagation (courbe, surface,..) suivant la technique des *marker particles* afin d'établir des approximations numériques appropriées à la représentation Lagrangienne.

Sans entrer dans les détails, on peut dire que ces approximations, extrêmement coûteuses en calculs pour avoir une propagation à peu près viable, souffrent d'instabilité et gèrent difficilement les changements topologiques dans les formes.

Cela provient du fait qu'elles suivent une analyse locale du front.

42. La formulation Eulérienne et ses avantages.

Pour avoir une analyse globale, intuitivement, l'idée est d'enchâsser le front dans un domaine plus étendu de données, par abus de langage, passer à une dimension supérieure, de telle sorte que les paramètres de la formulation seront les coordonnées de l'espace enchâssant, donc un système fixe de coordonnées, d'où la dénomination de formulation Eulérienne.

Une courbe sera donc enchâssée dans une surface, une surface dans un volume…de données. La donnée en question a été appelé par Osher et Sethian, fonction *Level Set (courbes de niveaux)*, et elle permet de se situer

dans un cadre de travail relatif aux équations d'Hamilton Jacobi (EHJ), d'usage courant en mécanique des fluides. En 1D, ces équations coïncident avec les lois de conservation hyperbolique (LCH).
Elles seront discutées dans le chapitre 5.
La principale conséquence sous jacente à l'analyse numérique de celles-ci est l'inefficacité des différences finies centrées qui ne répondent pas à une condition de stabilité appelée condition entropique (voir le chapitre 5 pour définition de l'entropie et la figure 14).
En outre, sur le plan continu comme sur le plan discret, la formulation Eulérienne bénéficie d'avantages indéniables, dont certains ont déjà été mentionnés :

- la formulation Eulérienne s'applique sans problème à toutes dimensions. Les formules (3'), (3'') qui sont donnés en 2D à partir des opérateurs gradient et divergence, sont ainsi valables en 3D. Evidemment, la formule pour la courbure change, du fait de la dérivée partielle première ou seconde en z, mais les opérateurs restent les mêmes.
- la fonction *courbes de niveaux u* reste toujours une fonction (à un point de l'espace correspond une seule valeur de u : on a une injection *de* R^n dans R) aussi longtemps que la vitesse reste régulière. Ainsi, le front doit être vu comme un niveau particulier de u (par exemple 0), ce qui fait qu'on a une propagation au sens d'une forme et non d'une courbe (voir figure 13).
- cela permet des manœuvres topologiques intéressantes : le front peut se scinder, fusionner, former des angles, etc…
- parce que la fonction *courbes de niveau u* demeure une fonction au cours du temps, et du fait du système fixe de coordonnées, les approximation portent uniquement sur cette fonction. Les différences finies (centrées ou non) apparaissent alors comme l'opérateur privilégiée, ce qui porte à deux seulement le type d'incréments différentiels utilisables : l'incrément temporel Δt et les incréments spatiaux Δx, Δy, etc..
  Pour tout les résultats, Δx, Δy ont été pris égal à 1.
- enfin, le fait d'avoir accès à un volume de données englobant autorise une perception autre du front que celle basée sur la connexité. On pourra rencontrer des cas de stabilité lors de l'évolution de la fonction *courbes de niveaux* qui ne sont pas lié à la connexité (au sens graphe des pixels) du front, mais à la stabilité de la surface paramétrée.

Les formules relatives à la formulation Eulérienne sont données en section **31.**

5. Lois de conservation hyperbolique et équations d'Hamilton Jacobi.

(Pour les sections 5 et 6, la fonction *g(I)* est ignorée : *g(I)=1*).

51. Cadre physique associé à la formulation Eulérienne.

En mécanique des fluides, la conservation de la matière et de l'énergie, imposée par les modèles, ont amené les physiciens à s'intéresser aux lois concernant les échanges de flux de matières dans un cadre évolutif. Les conséquences éventuelles de mauvais modèles numériques peuvent être l'émergence d'instabilités, de singularités intrinsèques traduisant des lacunes dans l'approximation de la condition entropique. Cette partie et la suivante ont pour objectif d'intégrer un certain nombre de concepts, propres à l'analyse numérique. Cela permettra de mieux comprendre pourquoi les méthodes imparties par l'application numérique de la formulation Eulérienne par *courbes de niveaux* pour la propagation de front peuvent en général s'affranchir de la lourdeur des calculs inhérente à l'approximation du gradient de *u*.

Partons de la définition suivante :

Déf : *Une solution forte à une EDP est une solution dont les dérivées existent et satisfont l'égalité. Une solution sera dite faible lorsqu'elle requiert un traitement pour avoir une forme intégrale de l'EDP si les dérivées n'existent pas.*

Le rôle des (LCH), en présence d'un modèle a priori mauvais, est de permettre la formulation de solutions faibles, c'est à dire des solutions à la forme intégrale du modèle. Autrement dit, la loi de conservation permet, en considérant une solution faible, au modèle déformable de progresser malgré la formation de ces singularités.

Déf : *LCH*

Considérons un volume G, d'élément de volume dv, qui contient de la matière u, qui est limité par une surface S, d'élément de surface ds et de normale $\vec{n}$. On appellera par ailleurs f(u) le flux de matière sortant du volume G. Ce modèle est dynamique et on a les relations suivantes :

Quantité de matière u dans G : $\int_G u dv$

Quantité de matière u traversant S : $\int_S u ds$.

Alors, la relation de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_G u dv = -\iint_S f(u)\vec{n} ds \tag{13}$$

En utilisant le théorème de la divergence, on aboutit à :

$$\iiint_G \left[u_t + \nabla . f(u)\right] dv = 0 \tag{14}$$

équation qui implique la **Loi de conservation hyperbolique** :

$$u_t + \nabla f(u) = 0 \tag{15}$$

Mais ce qui est intéressant concernant l'EDP (3), qui est un cas particulier de (2) dans l'espace de réaction /diffusion, est qu'elle satisfait en tant que modèle la (LCH) (15) lorsqu'elle possède une composante de

réaction uniquement. Rappelons par ailleurs que la réaction constitue un terme hyperbolique et la diffusion un terme parabolique et que ce dernier va jouer un rôle déterminant par la suite.

Ces (LCH) de type (15) sont par nature non linéaires et donc sujettes aux instabilités, même quand les données initiales sont régulières (i.e. différentiables). Mathématiquement, cela est important, car l'espace usuel des fonctions différentiables ne contient pas de solutions physiques au problème au delà du développement de singularités. Aussi nous devons considérer l'espace des solutions possibles dans son ensemble, mais le problème est de savoir quelle solution choisir, c'est à dire quelle est la solution physique viable au regard de toutes les solutions mathématiques envisageables. En gros, il faut trouver la solution faible correcte pour notre EDP (3). On verra qu'il y a un grand avantage à tenir compte de l 'équation (14), plutôt que (15), appelée **forme intégrale de la (LCH)**.

Déf : *EHJ*

Rappelons la formulation Eulérienne (2) en posant $F = -\beta$:

$$\varphi_t + F|\nabla\varphi| = 0$$

Les **équations d'Hamilton Jacobi** font intervenir l'Hamiltonien du système, fonction des dérivées partielles premières de ϕ (écriture dans R^n) :

$$\phi_t + H(\phi_{x1}, \phi_{x2}, \phi_{x3,\ldots}) = 0 \tag{16}$$

L'Hamiltonien, dans le cas particulier de la formulation avec *courbes de niveaux* , a dans R^3 la forme suivante :

$$H(\phi_{x1}, \phi_{x2}, \phi_{x3}) = \sqrt{\phi_{x1}^2 + \phi_{x2}^2 + \phi_{x3}^2} \tag{17}$$

En posant : $u = \phi_{x1}$

On a en une dimension: $\phi_t + H(u) = 0$

En une dimension, on voit donc que les (LCH) et les (EHJ) coïncident.

Dans R^n, la relation suivante permet d'établir la connexion entre les (EHJ) et les (LCH) :

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} f_i(u)_{xi} = 0 \tag{18}$$

On voit que les (LCH) et les (EHJ) ne coïncident plus dans les dimensions supérieures à 1 : *H(.)* est souvent une fonction non linéaire de ses arguments ϕ_{xi}, n'est pas séparable, et donc en toute rigueur, on ne peut utiliser une relation intégrale entre ϕ et u. Cependant, des solutions numériques qui ont été utilisées avec succès pour résoudre les (LCH) sont également utilisées pour les (EHJ).

52. Notions d'entropie et de shocks.

La recherche de la solution faible optimale repose sur la définition des concepts d'entropie et de singularités (*shocks* en anglais) :

Déf : *La notion d'entropie rappelle un concept provenant des équations de propagations des feux de forêt : un arbre brûlé reste brûlé et tous les arbres sont brûlés séquentiellement, comme le ferait un incendie réel (un arbre isolé non brûlé est un cas improbable…).*

Rem. :

Bien que cela ne soit pas précisé dans les références bibliographiques (il existe certainement des papiers traitant ce genre de problèmes), ces deux attributs donnent lieu à deux interprétations possibles pour l'entropie : une, très claire, dit qu'un arbre brûlé *reste* brûlé : on n'a pas de retour en arrière possible pour le front. L'autre, plus proche de l'espace discret, donnerait la condition pour qu'un schéma numérique pour la propagation d'un front ait l'obligation de visiter le graphe des pixels de manière séquentielle, comme le fait par exemple implicitement l'algorithme *Fast Marching*, sans laisser de *trous*. A cela s'ajoute le respect de la connexité du front et, dans un cadre dynamique, une condition nécessaire pour la stabilité de celui-ci. Pour référencer ces remarques, la condition *un arbre reste brûlé* sera appelée **entropie temporelle**, alors que la condition *sans laisser de trous* sera appelée **entropie variationnelle**, les deux conjuguées **entropie totale**. L'entropie totale assure le respect de la connexité du front et donc la stabilité du système.

Rem. :

On peut voir que cela implique que la propagation d'un label de segmentation par exemple, au regard d'une condition entropique temporelle, ne doit labelliser qu'une et une seule fois chacun des pixels.. On peut remarquer que la condition totale est utilisée implicitement sur le graphe des pixels pour la propagation de fronts basée sur la notion de voisinage, puisqu'on se base sur chaque pixel particulier pour labelliser les voisins et faire avancer le front, sans possibilité de recul et a priori sans laisser de trous. On ne peut donc pas *sauter* de pixels si on respecte l'entropie variationnelle et encore moins revenir en arrière si on respecte l'entropie temporelle.

Un tel processus, s'il est effectué avec une vitesse constante, sans viscosité, rappelle donc le *principe de construction de Huygens*. Il est aussi équivalent dans le cas continu à une dilatation ou érosion morphologique avec un élément structurant de type boule de la taille d'un pixel ou bien à la donnée d'une carte distance.

Cette condition est aussi à la base des méthodes rapides pour l'implémentation de la formulation Eulérienne des *courbes de niveaux* pour la propagation de formes, en particulier la méthode *Fast Marching*. La condition entropique pour la propagation de fronts est identique à celle pour les (LCH) où les schémas numériques stables, et respectant cette condition, ont une riche histoire, mais nous verrons qu'il sera bon, dans un objectif pratique d'interprétation des résultats, de distinguer les deux types d'entropies précitées ainsi que la donnée supplémentaire de la *connexité*.

Un des moyens les plus classiques dans la littérature pour définir un *shock* est de commenter les équations de Burger [6] [9] [26] et de montrer que ces équations aboutissent à une singularité de type *zone de raréfaction de l'information propagée,* si on considère que le front se propageant contient en lui-même une information dont on peut dire qu'elle est soumise à une loi de conservation de type (LCH). Une autre remarque intéressante amenée par la définition des *shocks* est la contradiction qui existe entre la propagation d'une forme et celle de sa surface (cf. figure 13). Mais les *shocks* ont leur définition propre et ont même conduit à la définition d'une grammaire des *shocks* [15], qui se divisent en 4 catégories (les définitions sont données en 2D):

Déf : *Un shock du 1er ordre est une discontinuité (coin) dans l'orientation du front d'intérêt (soumise, en hypothèse, à l'équation (3)). Un shock du 2ème ordre se forme quand deux points distincts et non voisins du front fusionnent sans que leur voisins immédiats ne se touchent. Quand une forme ou une partie de forme converge simultanément en une droite, un shock du 3ème ordre apparaît. Quand une forme ou une partie de forme converge simultanément en un point unique, on a un shock du 4ème ordre.*

Toutes ces définitions peuvent être renversées dans le temps et aboutissent à des solutions lisses. Les deux séquences suivantes illustrent la formation de *shocks* du 1er et 2nd ordre (parfois 3ème ou 4ème ordre quand plusieurs

pixels fusionnent en même temps), la première obtenue avec la méthode *brute*, la seconde avec la méthode *Narrow Band* (voir leur définition dans les parties suivantes) :

Fig. 11. Séquence de propagation en advection pure, utilisant la méthode *brute* (déf. Chapitre 7.). L'affichage met en évidence l'intérieur de la forme : on a une propagation au sens d'une forme et non au sens d'une courbe. Le front est la frontière de la forme, définie par les pixels dont la valeur des *courbes de niveaux* est négative.

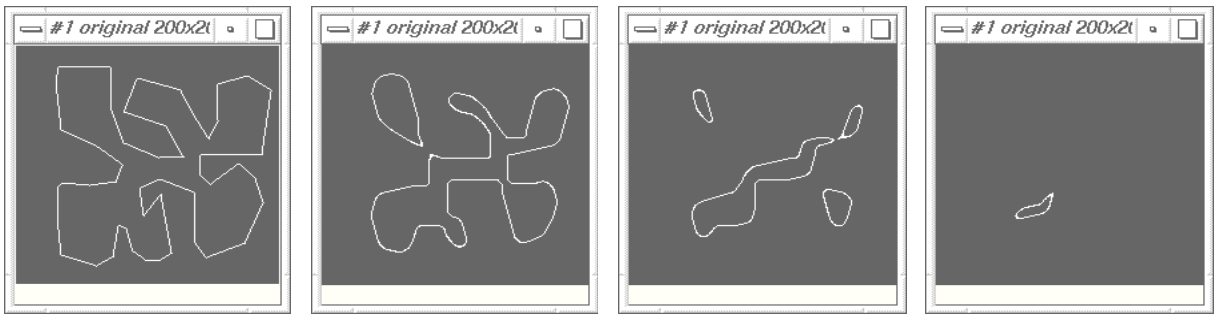


Fig. 12. Séquence de propagation en advection pure, utilisant la méthode *Narrow Band* (déf. Chapitre 7.). L'affichage met en évidence le front, niveau 0 des *courbes de niveaux*. On a la propagation au sens d'une forme et non d'une courbe… Pour les deux séquences, il a été pris les mêmes paramètres de diffusion, réaction, et incrément temporel.

Théorème : *Dans le processus d'évolution de l'équation (2) avec $\beta = \beta_0$ (réaction ou advection pure, dans le sens d'une érosion ou propagation vers l'intérieur), chaque extremum de courbure locale induit la formation d'un shock du premier ordre.*

Ce théorème vise surtout à illustrer le fait qu'on n'est jamais à l'abris de la formation d'un shock, lors d'une propagation en advection pure. La pertinence d'une méthode de propagation peut de mesurer sur l'efficacité de la gestion des shocks.

Ces définitions peu formelles sont surtout intéressantes pour le lien qu'elles établissent avec la notion d'entropie, voire de morphologie mathématique; certains auteurs en font la base d'une théorie de la description ou de la reconnaissance de formes [15] [33]. C'est surtout (mais pas seulement) au niveau de la formation des *shocks* que le respect de la condition entropique appropriée sera souhaitable. C'est à ce niveau qu'on peut clarifier la nuance entre propagation de formes et propagation de courbes : une courbe fermée sans nœuds, en théorie dans le cas continu, peut parfaitement, lorsqu'elle est soumise à une EDP de type (3), s'entrecroiser et former des nœuds, ce qui n'est pas concevable pour la forme induite par la surface interne à cette courbe : on a formation de *shocks*. De même, dans le graphe des pixels, la propagation d'un label de type courbe n'est pas aisée.

En effet, la formation d'un nœud peut être vu comme un schock du 2nd ordre pour la forme, donc une non différenciabilité locale à l'endroit où se scinde la forme. Pour la courbe, on continue à avoir des solutions différentiables mais une entropie temporelle non respectée comme on peut le voir sur les images suivantes :

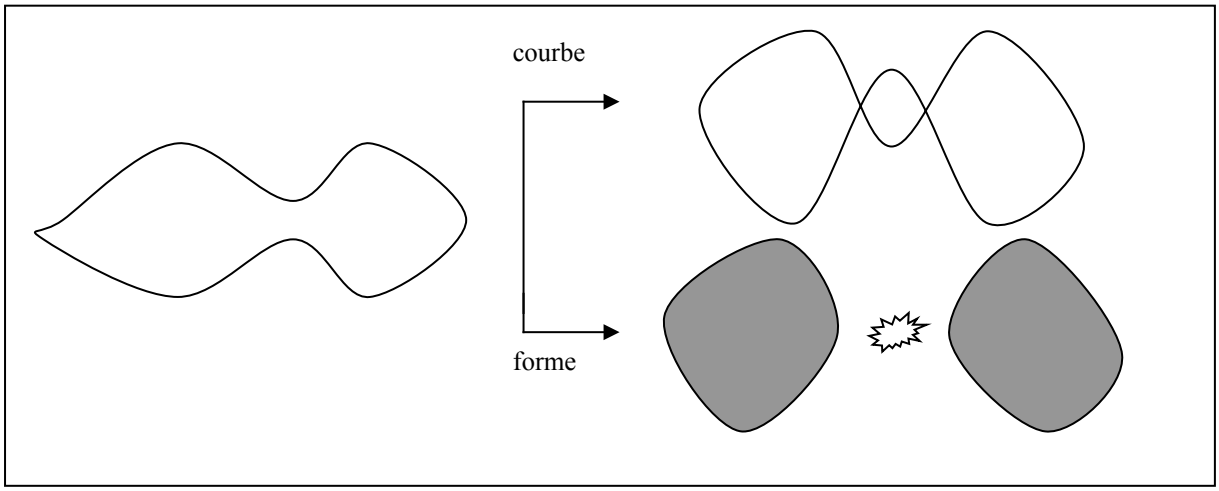


Fig. 13. Propagation d'une courbe et d'une forme. Dans tout l'exposé, on considère la propagation de formes. Le front est ainsi vu comme la frontière de la forme.

Par ailleurs, la condition entropique temporelle est une nécessité pour trouver la seule et unique solution « physique » viable aux (LCH) parmi son lot de solutions faibles. L'avantage le plus certain de la formulation Eulérienne est la grande facilité, comme nous pouvons le constater sur les séquences précédentes, à gérer les *shocks* .

Un important théorème dans le cas continu, est un test sévère dés qu'il s'agit de viabiliser une méthode de propagation de fronts dans le cas discret Ce théorème implique d'avoir accès à la courbure : propager le front en diffusion pure. Ce théorème est le suivant dans le cas discret:

Théorème : *Théorème de Graysons*

Une forme connexe qui évolue selon l'EDP (2) ou (3) en diffusion pure, c'est à dire sous sa propre courbure, ne provoque pas de shocks du 2nd ou 3ème ordre (création d'un trou dans la forme). En outre, elle converge vers un cercle et ensuite vers un point (shock du 4ème ordre) avant de disparaître.

Ce théorème [9] [12], dont la vérification sur le plan numérique est relativement récente, est mis en images dans le chapitre 7. Il illustre qualitativement, en outre, tout l'intérêt à utiliser de la viscosité lors d'une propagation.

53. Le rôle de la viscosité et les solutions physiques viables.

Revenons aux (LCH) : c'est le moment d'introduire le terme parabolique dans la (LCH) pour aboutir à une **loi de conservation avec terme visqueux.** Avant cela, revenons à l'équation (15). En une dimension, elle peut aussi s'écrire :

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{19}$$

Suivant l'ordre de u dans f, (19) est linéaire ou non linéaire. La solution faible trouve son fondement dans l'intégration de cette équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u dx = f[u(a,t)] - f[u(b,t)] \tag{20}$$

On dit que u est conservé au travers de cette équation.

La raison pour laquelle l'écriture (20) est significative est qu'elle ignore la différenciabilité en x.

Les solutions de l'équation (20) sont donc les solutions faibles de (19), d'après la définition donnée précédemment. Le but est alors de construire celles-ci au regard de (20) et de trouver la seule solution viable.

Une méthode artificielle et simple pour trouver l'unique solution faible est de rajouter un terme de viscosité à l'équation (19), terme parabolique qui fait intervenir les dérivées au second ordre [6] [7] [8] [12]:

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx} \tag{21}$$

La viscosité a un rôle profond car elle lisse les singularités susceptible d'apparaître, comme le ferait l'équation de propagation de la chaleur vue dernièrement avec les termes u_{xx} et u_{yy} [2] [6] [7] [12].

Ces *shocks* sont susceptibles de dégénérer vers un non respect de l'entropie totale : le front évolue en tant que courbe et le coin sur la courbe provoque un nœud sur le plan théorique (non respect de l'entropie temporelle) avec préservation de la connexité.

Sur le plan numérique, cela se traduit par des oscillations (non respect de l'entropie variationnelle et a fortiori temporelle) si un mauvais schéma est utilisé, bien que la connexité puisse éventuellement être préservée.

A partir du moment où ce coin est lissé par l'effet visqueux, il disparaît et on n'a plus que des solutions lisses et différentiables, ce qui assure la connexité du front.

Néanmoins, tout en restant dans ce cadre visqueux, il faut maintenant se donner la contrainte de l'entropie variationnelle, or on peut remarquer que la viscosité, si elle est exagérée ou associée à une constante de réaction, donne elle même parfois au front ou à la forme une tendance au non respect de la condition entropique totale (cette remarque sera discutée lors de la présentation des résultats), laquelle provient des différentes valeurs possibles pour la vitesse : un éventuel saut de pixels doit être envisagé. L'astuce est alors de trouver un compromis entre une situation instable uniquement réactive et une autre visqueuse, qui connecte avec le *principe de construction de Huygens :* faire tendre ε vers 0, ce qui a pour effet un rapprochement vers **l'unique solution physique viable respectant la condition entropique totale**. Ces notions vont nous permettre d'aborder les approximations numériques avec un cas concret et trouver les schémas numériques adaptés aux différentes situations [6] [7] [8] [12].

6. Schémas numériques associés et autres théorèmes.

61. Un cas particulier.

Partons de l'équation (2) ($u = \varphi$): $$\varphi_t = \beta|\nabla\varphi| \tag{2}$$

On se situe donc dans le cas de la formulation par *courbes de niveaux*, et les hypothèses qui s'y attachent. On va extrapoler cette équation au cas général des (EHJ) en prenant une forme différente pour l'Hamiltonien, en se limitant au cas simple particulier d'un problème aux valeurs initiales avec $\beta = 1$, (advection pure):

$$\varphi_t = (1+\varphi_x^2)^{1/2} \tag{23}$$

avec : $$\varphi(x,0) = f(x) = \begin{cases}(1/2-x), x \le 1/2. \\ (x-1/2), x > 1/2.\end{cases} \tag{24}$$

Ce cadre de travail est particulier à un espace 2D dans lequel le front constitue le graphe d'une fonction. On commencera par démontrer que le schéma numérique le plus immédiat pour l'équation (23), basée sur les *différences finies centrées,* c'est à dire approximer :

$$\frac{\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n}{\Delta t} = \left[1+\left(\frac{\varphi_{i+1}^n-\varphi_{i-1}^n}{2\Delta x}\right)^2\right]^{1/2} \tag{25}$$

est inefficace et engendre immédiatement des instabilités [6] [7] [12]. Les tests portant sur ce premier schéma numérique sont illustrés par la figure suivante (où intervient donc l'approximation de la norme du gradient en correspondance avec le terme d'advection avec l'aide des différences finies centrées).

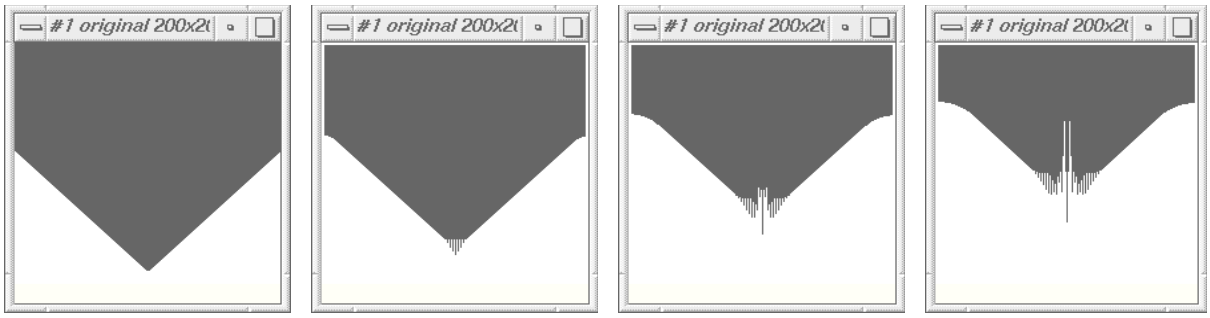


Fig. 14. (ne pas tenir compte des effets de bords).
Instabilité sous la forme d'oscillations parasites sur la pointe du V due à l'utilisation des différences finies centrées.

Le front initial a la forme d'un V, l'angle du V se trouvant en (1/2,0), la condition entropique totale implique comme comportement idéal un déplacement vers le haut à vitesse constante. Le V conserve donc sa forme. On peut voir que l'approximation numérique est correcte pour toute valeur de x différente de ½, ce qui donne $\varphi_t = 2^{1/2}$ (on ne tiendra pas compte des effets de bords).. Cependant, le coin ou *shock* initial du 1er ordre en (1/2,0) ne possède pas de dérivée première, l'approximation numérique fournit alors une valeur arbitraire qui, d'incrémentation en incrémentation, va créer une instabilité sous la forme d'oscillations parasites en complète contradiction avec la condition entropique totale. Il faut bien noter que les valeurs de Δx ou Δt n'interviennent pas ici (si on les fait tendre vers 0, les instabilités persistent) mais que cependant, une condition existe sur ces

valeurs pour obtenir une *stabilité intrinsèque* de la formulation Eulérienne, quelque soit le schéma numérique employé, appelée *CFL condition*.

On observe un phénomène de divergence, ou écart à la solution idéale, quand l'algorithme progresse. Bientôt, on constatera que les implications liées au phénomène d'instabilité en tant que divergence d'un *shock* initial seront utiles à démonter la stabilité d'une méthode de résolution numérique de la formulation Eulérienne appelé *Narrow Band*, même quand apparemment, une condition entropique variationnelle n'a pas cours. Ce cas particulier, où intervient donc l'approximation de la norme du gradient en correspondance avec le terme d'advection avec l'aide des différences finies centrées, a été testé.

Introduisons à présent la forme parabolique avec terme de viscosité dans l'équation (23), en l'incluant dans la vitesse $\beta(k) = 1-\varepsilon k$, avec la courbure ici égale à :

$$k = -\varphi_{xx} / \ (1+\varphi_x^2)^{3/2} .$$

On a alors [6]:

$$\varphi_t - (1+\varphi_x^2)^{1/2} = \varepsilon \frac{\varphi_{xx}}{1+\varphi_x^2} \tag{26}$$

Supposons qu'on essaye maintenant de construire une équation d'évolution pour la pente $u = \partial\varphi / \partial x = \varphi_x$ du front. En différenciant des deux côtés et en substituant dans l'équation (26),
on obtient :

$$u_t + \left[-(1+u^2)^{1/2}\right]_x = \varepsilon\left[\frac{u_x}{1+u^2}\right]_x \tag{27}$$

On peut remarquer que : $$f(u) = -(1+u^2)^{1/2} .$$

Alors, la dérivée de l'(EHJ) avec un terme parabolique de viscosité pour le changement induit sur φ est une (LCH) visqueuse pour la pente u. Pour $\varepsilon > 0$, le terme de viscosité, répétons-le, diffuse les gradients abrupts et renforcent les solutions lisses, donc stabilise le système. Pour $\varepsilon = 0$, des solutions discontinues peuvent naître à partir de solutions lisses (i.e. différentiables) et croître en oscillations, violant la condition entropique totale. Ce cas particulier montre la faillite liée à l'utilisation des différences finies centrées dans le cas d'une advection pure ($\varepsilon = 0$) en considérant bien sûr qu'on cherche une approximation pour le gradient de φ. On va voir que tous les schémas numériques et les calculs qui en découlent peuvent être évités dans le cas de méthodes particulières *stationnaires* (ou autres) pour la formulation Eulérienne, car on peut s'abstenir, grâce à certaines astuces algorithmiques, de chercher une approximation pour le gradient. Ces astuces s'appuient principalement sur la stabilité *intrinsèque* des algorithmes au niveau technique (manière de rechercher la fonction *courbes de niveaux* suivante). Cette remarque concorde avec le fait que l'utilisation du gradient dans la courbure, en l'approximant par des différences finies centrées, produit des comportements viables visqueux qui lissent les singularités éventuelles. De plus, au niveau numérique, l'introduction de schémas adéquats pour une advection pure entraîne malgré tout de la diffusion..

62. La méthode de la viscosité artificielle.

Un moyen direct d'aboutir à une solution viable est de tenir compte de l'équation (21) en ajoutant artificiellement de la diffusion dans le schéma numérique et de la faire tendre, bon gré mal gré, vers 0. Un schéma connu est le suivant [6] [7] [27] [28]:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t\left[\max(0,u_i)D_-^x u_i^n + \min(0,u_i)D_+^x u_i^n + \varepsilon D_{+x}^{-x} u_i^n\right]$$

Ce schéma, donné pour la fonction *u,* a une longue histoire, mais requiert trop de diffusion pour pouvoir bien fonctionner, ce qui arrondit les *coins* démesurément.

63. Cas général en une dimension et au premier ordre.

Dans cette section, on traite le problème de l'advection pure $F = 1$, en cherchant une approximation pour le gradient de φ. L'Hamiltonien de l'équation est donc :

$$H(\varphi_x) = \sqrt{\varphi_x^2}$$

L'extension au cas de plusieurs dimensions est aisée, moyennant l'intervention de schémas adaptés [7]. Le passage à un ordre supérieur augmente le coût en calcul et procure des solutions plus précises [7]. Les définitions et les théorèmes sont donnés pour un masque de taille 3 centré sur la valeur à approximer, c.à.d. :

$$u_i^{n+1} = fonction(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$$

et existent pour des tailles supérieures.

Déf. : *Notations* D_-^x, D_+^x, D_0^x *pour les opérateurs suivants pour une fonction* u_i^n *quelconque:*

$$D_-^x u_i^n = \frac{u(i\Delta x, n\Delta t) - u(i\Delta x - \Delta x, n\Delta t)}{\Delta x}, \qquad D_+^x u_i^n = \frac{u(i\Delta x + \Delta x, n\Delta t) - u(i\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x}$$

$$D_0^x u_i^n = \frac{u(i\Delta x + \Delta x, n\Delta t) - u(i\Delta x - \Delta x, n\Delta t)}{2\Delta x},$$

L'objectif est donc de trouver un schéma numérique à l'équation (20) pour avoir les solutions faibles de (19) et en suite tenir compte du problème de l'entropie.

Déf. : *Un schéma numérique est dit être dans une forme conservatrice s'il existe une fonction de flux numérique* $g(u_{i-1}, u_i)$, $g(u_i, u_{i+1})$ *qui peut approximer* $f_{i+1/2}$, $f_{i-1/2}$ *respectivement, de telle sorte que :*

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x} \qquad (28)$$

avec la condition requise de consistance : $g(u,u) = f(u)$.

Cette définition est naturelle : tout schéma peut au moins approximer la (LCH) [11]. Alors il est montré que tout schéma sous *forme conservatrice* donne une solution faible. Mais comment choisir la bonne solution faible, celle qui correspond au respect de l'entropie totale ?

Déf. : *Un schéma numérique de la forme* $u_i^{n+1} = f(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$ *est dit monotone si f est une fonction croissante de tous ses arguments*.

On aboutit alors au théorème essentiel :

Théorème : *Un schéma numérique sous forme conservatrice et monotone produit la solution qui satisfait la condition entropique totale.*

Un schéma classique, appelé Lax Friedrichs, émanant du théorème précédent, est [7] [11]:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f_{i+1} - f_{i-1}) \tag{29}$$

On peut montrer que ce schéma est *monotone* et peut se mettre sous une *forme conservatrice* via la fonction de flux numérique :

$$g(u_1, u_2) = -\frac{\Delta x}{2\Delta t}(u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(f(u_2) + f(u_1)) \tag{30}$$

Un avantage de ce schéma est qu'il ne nécessite aucune connaissance sur la structure de la fonction de flux f. Un défaut, s'il en est, est qu'il introduit de la diffusion (viscosité) en lissant les *shocks* sur une zone de pixels assez étendue, en relation avec les valeurs de Δx et Δt. Le fait d'en savoir plus sur la structure de la fonction de flux g permet d'aller plus loin dans la recherche de meilleurs schémas. On peut citer les schémas de Godunov, LeVeque, Sod… Godunov eût l'idée de proposer un schéma qui résout un problème local de Riemann sur la grille des données initiales. Cela produit une fonction g qui donne de meilleurs résultats sous la forme d'un lissage sur une zone locale de pixels très restreinte.

Pour obtenir une relation sur la fonction φ à partir de celle portant sur u, l'idée est de résoudre suivant u et ensuite d'intégrer, en tenant donc de la relation $u = \partial\varphi / \partial x = \varphi_x$.

On obtient alors (cas le plus général indépendamment de la fonction g) :

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t g(D_-^x \varphi_{i-p+1}^n, .., D_+^x \varphi_{j+q}^n) \tag{31}$$

où p et q représentent le niveau de précision (taille de masque utilisé) pour effectuer l'approximation.

Relation qui s'écrit sur un masque taille 3 :

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t g(D_-^x \varphi_i^n, D_+^x \varphi_i^n) \tag{32}$$

g , *fonction de flux numérique*, approxime f , et dans le contexte des (EHJ), est souvent référencé comme *l'Hamiltonien numérique.*

L'approximation de la formulation Eulérienne part de la relation (32), avec pour fonction g la relation (30) ou bien une autre fonction correspondant au critère (28) de *conservation* du schéma numérique et une approximation de la fonction f grâce à g.

Dans le cas spécifique de la première dimension, l'Hamiltonien s'écrit $H(u) = (u^2)^{1/2}$, avec $u = \varphi_x$. Pour une advection pure $F = 1$, on a :

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t\left[\max(D_-^x \varphi_i^n, 0)^2 + \min(D_+^x \varphi_i^n)^2\right]^{1/2} \tag{33}$$

Ici, une fonction g différente de celle définie précédemment a été utilisée, et procure certains avantages : aussi longtemps que l'Hamiltonien reste symétrique dans une dimension quelconque, le schéma (33) a l'avantage de fonctionner et procure la solution viable. Or, il s'averre souhaitable de pouvoir travailler dans une dimension au moins égale à trois, car la continuité du stage est de traiter des images 3D.

Le passage à un ordre supérieur est basé sur les séries de Taylor et se traduit par un rapprochement très net de l'entropie totale [7] [11] [12].

Cependant, l'effet visqueux engendré par le manque de précisions des modèles au premier ordre ne peut pas être perçu comme un inconvénient, car de toute manière, le terme de diffusion dans l'équation (3) sera systématiquement utilisé, car dans notre objectif de segmentation, il induira pour le front un comportement intéressant qui sera commenté dans les résultats.

64. Cas général avec une vitesse $F = -\beta$ quelconque.

Nous avons vu que dans le cas spécifique de l'obtention de schémas numériques pour l'approximation du gradient dans la cas d'une advection pure, on avait la possibilité de plusieurs fonction *g*. La philosophie des schémas pour le passage à la dimension supérieure dépend d'un critère sur l'Hamiltonien *H* du système et de l'utilisation de la relation (30) avec la fonction *g* appropriée [7] [11] [12] [27] [28].

Déf. : *En dimension n, un Hamiltonien H régulier (i.e. tous ses arguments sont différentiables) est dit convexe*

si :
$$\frac{\partial^2 H(.)}{\partial x_i x_j} \geq 0$$

pour tous x_i , x_j *où* $i, j \in \{1..n\}$.

Si *H* est *convexe*, alors il vaut mieux utiliser le schéma donné en (33) généralisé aux dimensions supérieures. Si *H* est *non convexe*, alors il vaut mieux utiliser le schéma de Lax Friedrich. La *convexité* de *H* est induite par celle de *F*, par la relation $H = F|\nabla\varphi|$.

Dans le cas de la dimension 3 avec *F convexe*, on a par exemple :

$$g(u_1,u_2,v_1,v_2,w_1,w_2) =$$
$$\left[\max(u_1,0)^2 + \min(u_2,0)^2 + \max(v_1,0)^2 + \min(v_2,0)^2 + \max(w_1,0)^2 + \min(w_2,0)^2\right]^{1/2}$$

et :
$$\varphi_{ijk}^{n+1} = \varphi_{ijk}^{n} - \Delta t g(D_-^x\varphi_{ijk}^n, D_+^x\varphi_{ijk}^n, D_-^y\varphi_{ijk}^n, D_+^y\varphi_{ijk}^n, D_-^z\varphi_{ijk}^n, D_+^z\varphi_{ijk}^n)$$

On aboutit au schéma du premier ordre qui inclut la vitesse *F* :

$$\varphi_{ijk}^{n+1} = \varphi_{ijk}^{n} - \Delta t[\max(F_{ijk},0)\nabla^+ + \min(F_{ijk},0)\nabla^-]$$

$$\nabla^+ =$$
$$[\max(D_-^x\varphi_{ijk}^n,0)^2, \min(D_+^x\varphi_{ijk}^n,0)^2, \max(D_-^y\varphi_{ijk}^n,0)^2, \min(D_+^y\varphi_{ijk}^n,0)^2, \max(D_-^z\varphi_{ijk}^n,0)^2, \min(D_+^z\varphi_{ijk}^n,0)^2]^{1/2}$$

$$\nabla^- =$$
$$[\min(D_-^x\varphi_{ijk}^n,0)^2, \max(D_+^x\varphi_{ijk}^n,0)^2, \min(D_-^y\varphi_{ijk}^n,0)^2, \max(D_+^y\varphi_{ijk}^n,0)^2, \min(D_-^z\varphi_{ijk}^n,0)^2, \max(D_+^z\varphi_{ijk}^n,0)^2]^{1/2}$$

Les schémas à l'ordre supérieur et pour *F non convexe*, ne seront pas donnés, car de toute manière, ces approximations ne seront pas utilisées. Il y a plusieurs raisons à cela qui seront évoquées dans le paragraphe suivant, en relation avec l'utilisation de la *viscosité.*

Cette relation globale englobe tous types de vitesse, du moment qu'elle soit convexe, néanmoins ce schéma général est donné à titre indicatif.

En pratique, seule la diffusion utilisera de manière explicite une approximation du gradient : la composante de diffusion ou *viscosité,* introduit, voir (3''), les dérivées partielles secondes de φ, et implique le lissage des singularités éventuelles. Du fait de ses propriétés, elle fournit donc une stabilité au système, ce qui permet la simple utilisation des différences finies centrées tant dans l'approximation de la courbure que dans celle de la norme du gradient [7] [12].

Quant à la réaction, elle sera laissée telle quelle sans utiliser les schémas numériques précédents, on évite ainsi l'approximation de la norme du module du gradient et les cas instables. Mais cette limitation sur le plan numérique pose des contraintes sur lesquelles nous reviendrons.

Donc $\beta_0 \, |\nabla\varphi|$ sera toujours approximé en 2D ou 3D par :

$$\beta_0$$

en se ramenant au cas de la *poursuite* d'une carte distance en faisant l'hypothèse de l'équation (5) :

$$|\nabla u| = 1$$

Et $\beta_1 k |\nabla\varphi|$ sera toujours approximé en 2D par :

$$\beta_1 \frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2 - 2\varphi_y\varphi_x\varphi_{xy} + \varphi_{yy}\varphi_x^2}{(\varphi_x^2+\varphi_y^2)^{3/2}}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)^{1/2} = \beta_1 \frac{\varphi_{xx}\varphi_y^2 - 2\varphi_y\varphi_x\varphi_{xy} + \varphi_{yy}\varphi_x^2}{(\varphi_x^2+\varphi_y^2)^{1/2}} \qquad (33')$$

Où chaque dérivée partielle première ou seconde est approximée à l'aide des différences finies centrées.

En 3D, ces relations ne sont plus uniques : il existe une infinité de courbures en un point dont on tire souvent les courbures caractéristiques, courbure gaussienne et courbure moyenne :

$$k_M = div\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right) = \frac{[(\varphi_{yy}+\varphi_{zz})\varphi_x^2 + (\varphi_{xx}+\varphi_{zz})\varphi_y^2 + (\varphi_{xx}+\varphi_{yy})\varphi_z^2 - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} - 2\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} - 2\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}]}{(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)^{3/2}}$$

$$k_G = \frac{\begin{array}{c}[(\varphi_{yy}\varphi_{zz}-\varphi_{yz}^2)\varphi_x^2 + (\varphi_{xx}\varphi_{zz}-\varphi_{xz}^2)\varphi_y^2 + (\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2)\varphi_z^2 + 2\varphi_x\varphi_y(\varphi_{xz}\varphi_{yz}-\varphi_{xy}\varphi_{zz}) \\ + 2\varphi_y\varphi_z(\varphi_{xy}\varphi_{xz}-\varphi_{yz}\varphi_{xx}) + 2\varphi_x\varphi_z(\varphi_{xy}\varphi_{yz}-\varphi_{xz}\varphi_{yy})]\end{array}}{(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)^2}$$

65. La condition de stabilité intrinsèque dite *CFL condition*.

Cette condition, portant sur les incréments Δx $(=\Delta y=\Delta z)$ et Δt, permet de définir un domaine d'inclusion pour la stabilité intrinsèque à la formulation Eulérienne, quelque soit le schéma numérique ou la méthode algorithmique utilisée [11]. Pour résumer, on peut dire qu'elle souligne un avantage de la formulation Eulérienne, laquelle est référencée par rapport à un système fixe de coordonnées : le critère de stabilité intrinsèque porte uniquement sur le rapport des deux incréments temporel et spatial.

Elle exprime qu'une condition nécessaire pour la stabilité de tout schéma numérique, est que le *domaine de dépendance* de chaque point, dans le domaine du schéma numérique, doit inclure le domaine de dépendance de l'EDP elle même. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour avoir la stabilité du schéma [11].

Cette condition s'exprime en fonction de l'Hamiltonien du système H(.) [n] (en supposant $\Delta x = \Delta y$)

$$1 \geq \frac{\Delta t}{\Delta x}\left|H'(.)\right|$$

On voit donc que si $\Delta x = \Delta y$ est fixé, il suffit de jouer sur l'incrément temporel pour modifier la condition.

66. Cas spécifique à l'obtention des résultats et différents algorithmes associés.

Les chercheurs, dans la formulation variationnelle Eulérienne, sont avides de nouveaux algorithmes pour propager efficacement un front avec tous les avantages qui découlent de cette formulation. Efficacement veut surtout dire rapidement. Les enjeux à court terme sont nombreux et ont trait aussi bien aux problèmes de segmentation qu'aux problèmes d'analyse de mouvement /analyse multi images. Dans un soucis de rapidité d'exécution, il a donc été testé différents algorithmes (certains sont en cours). L'élément le plus remarquable est qu'*aucun* des algorithmes présentés ou existant n'utilise le schéma global précédent. La pertinence de ceux-ci sont à mettre en relation, dans le cadre d'une formulation *stationnaire* des *courbes de niveaux*, avec les critères d'entropie et au de connexité : cela donne des schémas beaucoup plus performants que pour la méthode *brute* car, au lieu de calculer sur l'ensemble de l'image dans cette dernière, on ne calcule que sur un nombre limité de points.

Il est nécessaire de bien séparer l'approximation des composantes respectives de diffusion, réaction, et fonction *g(I).* En ce qui concerne la fonction *g(I)*, qui sera détaillée plus loin, elle ne fait pas intervenir une information sur la fonction *courbes de niveaux* φ , mais une dépendance à l'information présente dans l'image, il faut donc veiller à choisir soigneusement sa forme, au regard de la stabilité du système.

Parfois, un non respect de l'entropie soit variationnelle, soit temporelle, conséquence de l'utilisation d'un algorithme particulier, ne porte pas à conséquence sur le plan de la stabilité, mais un comportement idéal du front demeure celui où tous les pixels ou voxels en 3D sont visités au moins une fois.

Pour les résultats présentés par la suite, la composante d'advection de la vitesse n'a pas été approximée dans la méthode *brute* avec les schémas précédemment décrits, qui part de la carte distance à l'initialisation, sans la réinitialiser ensuite : la fonction *courbes de niveaux* φ est donc susceptible de *diverger* dans des cas instables.. Mais le gradient en relation avec l'advection, n'est pas approximé, donc pas utilisé : ce qu'on utilise à ce moment là comme information, ce n'est plus une approximation du gradient mais la fonction *courbes de niveaux* elle même, laquelle est empreinte de l'effet de la viscosité, dont les valeurs à tout moment sont donc réelles. φ n'étant modifié, d'itérations en itérations, que sous l'influence de la viscosité, la stabilité est alors assurée grâce à l'effet stabilisateur de cette dernière. Implicitement, on a donc créé un modèle *semi-stationnaire*.

Une formulation *stationnaire* fait référence à une équation de propagation appelée Eikonal (voir section **733**), qui part des solutions des (EHJ) avec viscosité, et met en œuvre la technique algorithme sous jacente, appelée *Fast Marching*, pour propager le front dans un respect entropique total, ce qui implique pour la vitesse certaines hypothèses. Un algorithme récent, basé sur le *Fast Marching*, appelé *Hermès,* possède les qualités du *Fast Marching*, sans en avoir les défauts (utilisation impossible d'un effet visqueux).

La méthode *Narrow Band* (il existe plusieurs versions de cette méthode), dans la version testée ultérieurement, réinitialise la carte distance à toutes les itérations dans une bande de largeur définie autour du front réactualisé, et on a donc $|\nabla\varphi|=1$ dans le cas continu, ce qui permettrait de s'affranchir de l'approximation du gradient (cependant dans le cas numérique, l'utilisation de l'approximation donne de meilleurs résultats). Mais du fait qu'on a réinitialisation de la carte distance, on est soumis au problème de sélection des pixels d'intérêt du front : on ne peut plus définir comme avec la méthode *brute* une forme à partir des valeurs réelles de la fonction φ , on

a donc la propagation d'un front d'intérêt soumis à un critère de sélection et les défauts qui s'y attachent. Chaque inconvénient a son avantage : le fait qu'on traite en permanence sur la carte distance en *effaçant l'histoire de* φ, apporte alors deux qualités essentielles : un critère de stabilité qui est basé sur la viscosité uniquement car l'advection prend effet par rapport à la carte distance et à la largeur de la bande (on ne peut aller au delà de la bande d'intérêt), et ensuite le fait que cette méthode ignore tout à fait la condition entropique temporelle, grâce à la réinitialisation. Le front peut alors parfaitement reculer, tout en ayant les qualités liées à la formulation Eulérienne (il peut se scinder, fusionner, etc…). Il ignore même, dans une certaine mesure, l'entropie variationnelle, car, comme on l'a souligné plus haut, le développement d'instabilités dans un système dynamique est liè à l'histoire de celui-ci, ce qui n'est pas le cas pour la méthode *Narrow Band*. Il en résulte un comportement tout à fait intéressant du front dans cette méthode et cette version spécifique : le front a un comportement stable, même quand ni la *connexité*, ni *l'entropie variationnelle*, ni *l'entropie temporelle* ne sont respectées ! Cela ne fait que confirmer l'étendue des possibilités de la formulation Eulérienne.

67. Résumé et conclusion.

Cette section a surtout eu pour objectif de définir les implications liées au passage dans le domaine discret pour la formulation Eulérienne des *courbes de niveaux*. On a pu constater que le stabilité des schémas établis dépend fortement de l'introduction de la viscosité (ou composante de diffusion), la situation entropique idéale étant de faire tendre ce paramètre vers 0 pour avoir une condition entropique totale. Ce cadre de travail idéal, dans le but d'approximer la norme du gradient de φ, n'est néanmoins en pratique pas utilisé, car il est très coûteux en calcul. Des algorithmes efficaces existent, s'affranchissant ou non de l'approximation du gradient, tout en restant stables. On gagne alors énormément en rapidité. Néanmoins, il faut garder à l'esprit la contrainte de l'entropie sur le graphe des pixels, et cette notion permettra de différencier fortement le fonctionnement des algorithmes *rapides*.

7. Cadre de travail et résultats.

71. Méthodologie.

Les essais ont été effectués essentiellement sur des images 2D d'angiographie cardiaque 512*512, et l'algorithme principalement utilisé est, lors de la segmentation, de type *Narrow Band.* La mise en place de la méthodologie dans un cadre de travail limité au 2D ne pose pas de problème puisqu'un des avantages de la formulation Eulérienne est de s'étendre à toutes dimensions, en particulier en 3D.

Seulement, toutes les contraintes provenant de la représentation en 3D de l'information d'intérêt s'ajoutent à celle de la lenteur des calculs. Il est donc préférable de valider les travaux en 2D avant de passer à la dimension supérieure. D'un point de vue technique, seuls changent la formule pour la viscosité via la courbure, et la définition des voisinages de connexité (6- 18- ou 26-connexité) pour les travaux préliminaires, que sont la recherche d'une carte distance au front initial selon les hypothèses vues précédemment dans le premier chapitre :

$$u_0(x, y,..,0) = \pm dist(\Gamma_0)$$

et la propagation d'un label permettant de différencier l'intérieur de l'extérieur d'une forme afin de signer la distance calculée. D'une manière générale, l'obtention d'une carte distance signée ou non est la condition préalable pour développer un algorithme de propagation de front.

La manière optimale de se donner une carte distance à un ensemble de points repose sur l'algorithme vu dans le chapitre 2, dont les piles sont indexées par le carré de la distance. Cette optimalité représente un gain en temps non négligeable et est fondamentale.

Souvent, la définition d'une *bulle* comme front initial permet de connaître automatiquement l'intérieur et le signe de la carte distance.

Par ailleurs, la mise en œuvre d'une *bulle* initiale de manière automatique peut s'avérer utile dans le cadre des données 3D issues du protocole clinique.

Outre l'objectif final du stage qui est de définir la pertinence des modèles déformables représentés par les EDP de type *courbes de niveaux* dans un espace de réaction /diffusion dans un objectif précis de segmentation, une grosse partie du travail sous jacent réside dans la mise en place de méthodes efficaces permettant de s'affranchir au mieux du modèle numérique proposé dans la section précédente, ceci surtout parce que la contrainte temps de calculs, déjà présente en 2D, représente un lourd tribu en 3D.

Les prochains essais, dans la continuité du stage, porteront sur les autres méthodes rapides respectant l'entropie totale, *Fast Marching,* et *Hermès* (ce dernier développé récemment à l'INRIA Sophia/Antipolis, dans un objectif d'analyse multi image et détection de mouvements dans une scène).

Pour ce qui est des images 2D, une certaine méthodologie a été respectée lors des essais permettant de justifier du comportement du front lors de la propagation par méthode *Narrow Band* et d'établir les limitations du concept de segmentation par ce genre de modèles déformables.

Le *snake* n'a pas été utilisé, bien qu'il puisse être manœuvré facilement dans un cadre Eulérien, mais une étude de son comportement dans ce cadre a déjà fait l'objet de nombreux articles. Une approche de ce type ou avec les EDP qui s'y attachent doivent logiquement fournir le fil d'Ariane des travaux ultérieurs relatif au problème initial de segmentation des données pulmonaires 3D.

A ce niveau, on peut donc distinguer, pour un cadre de travail Eulérien, les différentes méthodes de traitement possibles. Chacune possède ses avantages et ses limitations. Pour chaque méthode, la dépendance aux paramètres est inévitable, et il sera bon de connaître la portée de ceux-ci. Chacun des algorithmes sera donné.
On pourra distinguer d'une part la propagation du front seul, sans critère d'arrêt, ce qui nous donnera une idée du comportement du front lié à la méthode utilisée, et d'autre part la propagation en fonction des informations de l'image, via le critère d'arrêt *g(I)*.
Les limitations lors d'une propagation libre peuvent souvent être recadrées quand intervient *g(I)*, en particulier quand on utilise une diffusion négative (i.e. instabilité absolue en théorie) : le front *explose* en propagation seule, alors que des comportements stables sont envisageables avec intervention de *g(I)*.
Par ailleurs, on abordera la pertinence d'un prétraitement sur les images angiographiques en général avec extension aux données pulmonaires ainsi que le conditionnement propice à la mise en œuvre d'une propagation de front dans l'espace de réaction /diffusion avec critère d'arrêt suivant l'équation (3) ou (4) :

$$u_t = g(I)(\beta_0 - \beta_1 k)|\nabla u| \tag{3}$$

$$u_t = -\beta_1 . g(I).div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}).|\nabla u| + \beta_0 . g(I).|\nabla u| \tag{4}$$

On mettra en évidence le rôle déterminant du critère d'arrêt *g(I)* pour le front, et la recherche du meilleur critère par rapport aux données brutes ou prétraitées peut constituer un réel problème d'optimisation.
La méthodologie sous jacente, consiste à tester d'abord le front seul (en propagation libre) en rapport avec une méthode possible, ensuite à définir le meilleur espace de réaction /diffusion, et le meilleur critère d'arrêt en fonction du type d'image et du maximum d'informations émanant de cette image.
Il s'agit ensuite de comprendre les limitations, et d'avoir recours au prétraitement dans un souci d'amélioration, et ainsi d'entrevoir la portée générale de ce cadre de travail.
Celui-ci peut en outre être facilement étendu à d'autres types d'EDP, par exemple *contours actifs géodésiques* et leur étude dans le cadre Eulérien, comme on l'a dit, est la continuité logique de ce stage.

72. Le critère d'arrêt.

Il s'agit, pour passer de la propagation seule à une propagation qui a pour but la segmentation de l'image, de prendre appui sur *toute* l'information disponible. L'idée la plus couramment admise est de ralentir la propagation dans les zones de contours, ce qui amène une dépendance aux gradients de la forme [8] [12]:

$$g(I) = \frac{1}{1 + |\nabla I|^m} \tag{34}$$

Dans une image fortement bruitée, il est possible aussi de prendre une dépendance au gradient de l'image filtrée avec un prétraitement de type filtrage Gaussien de variance σ^2 :

$$g(I) = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma * I|^m} \tag{34'}$$

m est une constante entière qui module l'action du gradient.
Dans tous les algorithmes, *m* = 2. L'action et la pertinence d'un prétraitement sera vue plus loin.

Afin de privilégier certaines valeurs de gradients par rapport à d'autres en établissant un seuil non arbitraire différent de 1, et en considérant que le gradient n'est pas forcément normalisé à 0/255 en sortie de fonction gradient, la forme suivante pour *g(I)* a été testée :

$$g(I) = \frac{1}{1 + (|\nabla I| / Dgr)^2} \tag{35}$$

Sous cette forme, on peut obtenir des résultats intéressant qui seront vus bientôt. Cependant, la limitation principale vient du fait que les *artefacts* dans les gradients, visibles sur l'image ***8***, en particulier les trous, permettent la sortie du front, ce qui est intolérable dans un objectif de segmentation. Une idée pour remédier à cela, dans un premier temps, est d'inclure une dépendance à l'image sous la forme :

$$g(I) = \frac{(I / Dim)^n}{1 + (|\nabla I| / Dgr)^2} \tag{36}$$

Dim : dépendance image.

Dgr : dépendance gradients.

La valeur de *n* module l'action de l'image sur sa dépendance. Souvent *n* a été pris égal à 1. Pour ne pas que ces modèles de fonction d'arrêt aggravent les implications entropiques de la méthode numérique utilisée, il est nécessaire de considérer le domaine d'action de *g(I)*. Des valeurs supérieures à 1 pour *g(I)*, en relation avec les autres attributs intervenant dans le calcul de la vitesse (courbure, diffusion, réaction, incrément temporel) peuvent éventuellement conduire à un non respect de l'entropie variationnelle, c'est à dire *sauter* un pixel. La pire conséquence en est le franchissement du contour si sa largeur est faible, bien que ce soit un cas improbable. Il n'y a pas que *g(I)*, comme on l'a vu, qui est susceptible d'influencer l'entropie variationnelle. La courbure, par exemple, si elle est forte, peut imprimer à la vitesse une valeur excessive, qui va se traduire par un *saut* de pixels. Cela a été testée avec la méthode brute où le critère de sélection pour l'affichage du niveau 0 de la fonction *courbes de niveaux* est relatif à la formule (celle de la forme connexe intérieure au front est aussi donnée) :

$$forme(t) = \{u(x, y,.., t) | -\infty < u(x, y,.., t) <= \varepsilon\}$$

$$front(t) = \{u(x, y,.., t) | -\varepsilon < u(x, y,.., t) < \varepsilon\} \tag{37}$$

Cela implique une *hauteur* ainsi qu'une *largeur* de front puisqu'on traite un *volume* paramétré. Ce type d'affichage permet de rendre compte de l'effet entropique de la viscosité dans une diffusion pure (non respect de l'entropie variationnelle) mais n'influence aucunement le système :

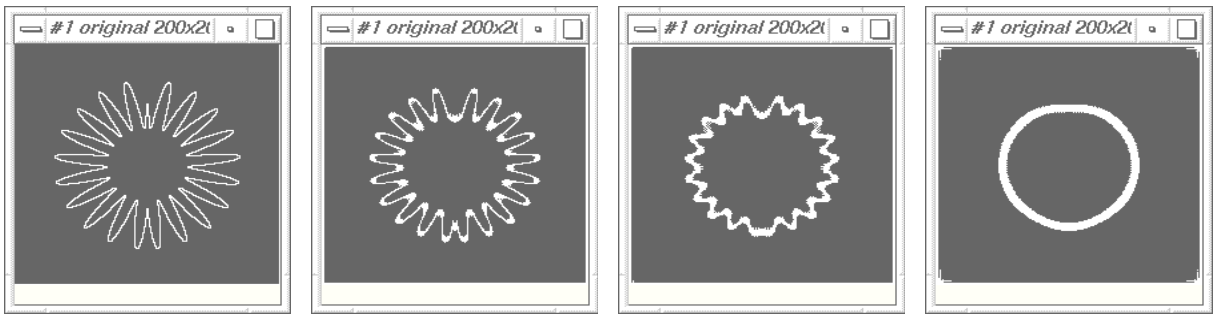


Fig. 15. Le mode d'affichage permet de rendre compte de l'effet variationnel de l'entropie au niveau des fortes courbures.

On voit bien sur cette séquence que la vitesse plus grande là où la courbure est forte entraîne une *largeur* de front plus grande. Si on se réfère à un autre type d'affichage séparant juste l'intérieur et l'extérieur de la forme définis respectivement entre $]-\infty\ ,\ 0]$ et $[0\ ,+\infty[$, la *hauteur* et la *largeur* de front n'ont plus lieu d'être. Cependant, l'effet de la viscosité va quand même se traduire par des *sauts* de pixels dans les zones de fortes courbures (le type d'affichage utilisé n'ayant rien à voir avec l'évolution du système….).

Il est donc nécessaire de moduler les paramètres intervenant dans l'entropie variationnelle (c'est à dire tous) grâce à un paramètre global au regard de la vitesse. Le seul paramètre conditionnant globalement l'entropie variationnelle est l'incrément temporel, puisqu'il est multiplicatif par rapport à l'ensemble des autres paramètres.

Les résultats finaux relatifs à la méthode *Narrow Band* font néanmoins évidence de segmentations identiques quand pourtant, des valeurs de Δt diffèrent (pris dans une certaine plage de valeurs). Cela est spécifique à la méthode, où l'entropie variationnelle est bornée par un saut de la largeur de bande au maximum, bien que le choix le plus judicieux de l'incrément temporel limite le saut à un pixel maximum. Comme il l'a été précisé, la recherche du critère d'arrêt optimal (les résultats feront apparaître les domaines de prédilection de (34) (35) et (36)) ne dispense pas de resituer le problème de segmentation dans le cadre plus général du choix de la bonne EDP.

Le comportement intéressant d'un front n'est pas lié à la seule utilisation de la viscosité.

73. Les méthodes possibles et les résultats.

La création de nouveaux algorithmes encore plus efficaces que ceux présentés ici est un thème de recherche d'actualité. Les enjeux concernent l'analyse multi image, la détection de mouvements. Ils sont complémentaires des modèles statistiques par analyse Markovienne de l'image.

Dans cette partie, les méthodes seront expliquées et commentées en image en précisant au passage les algorithmes associés sous forme de fonctions explicites. Les paramètres importants seront donnés et commentés.

731. La méthode *brute*.

Algorithme :

```
Initialisation_Front( piles, autres attributs ) .
Courbes_de_niveaux  = Carte_Distance_Au_Front( piles, autres attributs ).
Pour i depuis 0 jusqu'à  Fin_propagation :
            Courbes_de_niveaux  =  Calculs( Courbes_de_niveaux, piles, autres attributs ).
            Afficher( Courbes_de_niveaux ).
Refaire.
Fin.
```

Détails des fonctions :

- **Initialisation_Front(** piles, autres attributs **) .**

Le front peut être initialisé de différentes manières. L'essentiel à retenir est une labellisation obligatoire de l'intérieur et de l'extérieur du front, afin de signer ensuite la carte distance au front.

- **Calculs(** Courbes_de_niveaux, piles, autres attributs **).**

Le calcul (remise à jour de la fonction Courbes_de _niveaux) utilise les remarques qui ont étés faîtes précédemment :

- approximation (de la norme) du gradient avec les différences finies centrées pour le terme de diffusion.
- aucune approximation (de la norme) du gradient pour le terme de réaction.

```
Cela aboutit explicitement aux relations algorithmiques suivantes, partant de la relation
(33') et de celles qui l'accompagnent.
    courbure = ( lsxx.lsy² - 2.lsy.lsx.lsxy + lsyy.lsx² ) / (lsx² + lsy² )^1/2 ;
    F_prop   = 0 ;
    /* dépendance à l'image non utilisée dans la méthode brute */
    F_curv   = DIFFUSION . courbure ;
    F_adv    = REACTION ;
    Level_set_suivant[i][j] = Level_set_precedant[i][j] + ΔT. (F_curv + F_adv + F_prop) ;
    lsx  ⇔ dérivée partielle première en x.
    lsy  ⇔ dérivée partielle première en y.
    lsxy ⇔ dérivée partielle en x et y.
    lsxx ⇔ dérivée partielle seconde en x.
    lsyy ⇔ dérivée partielle seconde en y.
```

Commentaires et résultats :

La méthode *brute* a été testée en propagation sans image (propagation du front seul) sur une imagette de petite taille, typiquement 150*150. Le modèle numérique présenté en page 32 n'a pas été utilisé : la composante de réaction a été laissée telle quelle, sans même faire intervenir la norme du gradient, et la composante de diffusion a été approximée suivant (33'), ce qui a été justifiée auparavant [6] [7] [8] [9]. Rappel : la conséquence sur le plan mathématique en est que la surface paramétrée (représentant la carte distance signée au front initial) n'est modifiée, d'incrémentations en incrémentations, que par les effets de la viscosité. Or, sur le plan numérique, nous avons vu que cela induit une stabilisation du système. Donc, ce schéma a un comportement stable

La méthode *brute,* avec tout le modèle numérique présenté page 32, implique par ailleurs :

- que la réinitialisation de la fonction *courbes de niveaux* s'effectue sur tous les points de l'image. La lenteur des incrémentations est donc fonction du carré de la taille de l'image (en 2D). On laisse imaginer sur une image de données pulmonaires angiographiques typique 512*512*512 le temps de calcul exorbitant…
- que l'*histoire de la fonction courbes de niveaux* est préservée : les instabilités peuvent croître sous la forme d'oscillations parasites ou même d'explosion. Toutes sortes d'effets non entropiques associés sont envisageables, suivant les circonstances : non respect de l'entropie variationnelle et temporelle (explosion..), divergence dans des cas instables au bout d'un certain nombre d'incrémentations. Néanmoins, sans le modèle numérique page 32, mais avec les hypothèses formulées précédemment, l'hypersurface paramétrée reste stable.
- l'avantage de la conservation de l'*histoire* est la précision : l'*histoire* des faibles courbures est préservée (par exemple), ce qui a comme conséquence q'une zone figée pendant un certain laps de temps peut à nouveau évoluer car le lieu local du front n'est que l'approximation numérique de valeurs réelles, qui évoluent, aussi petites soient-elles, d'incrémentations en incrémentations.

Ces implications sont très bien mis en image par les séquences suivantes, qui montrent :

Fig. 16. *1ère séquence : $\Delta t = 0.98$. $\Delta x = \Delta y = 1$. Diffusion = 1.6. Réaction = 0.*
L'instabilité liée à un paramètre de diffusion trop important au regard de la *CFL condition* (explosion de la forme..).

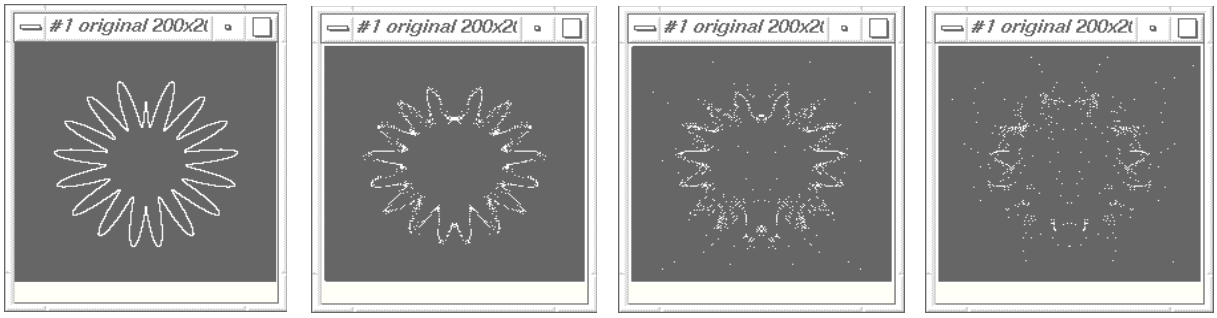


Fig. 17. *2ème séquence* : *Δt = 0.98. Δx = Δy = 1. Diffusion = 0.9. Réaction = 0.*
La tentative de vérification du théorème de Graysons avortée de par l'effet de la préservation de l'*histoire* de *φ*. Des instabilités apparaissent dans les fortes courbures seulement après un demi millier d'incrémentations (environ).

Fig. 18. *3ème séquence* : *Δt = 0.98. Δx = Δy = 1. Diffusion = 0.8. Réaction = 0.*
Un interstice local trop petit entre les bras de la spirale, associé à une diffusion encore trop grande, provoque des *shocks* du 2nd ordre ou d'ordre supérieur. On constate que la formulation Eulérienne gère sans problèmes les difficultés au niveau topologique.

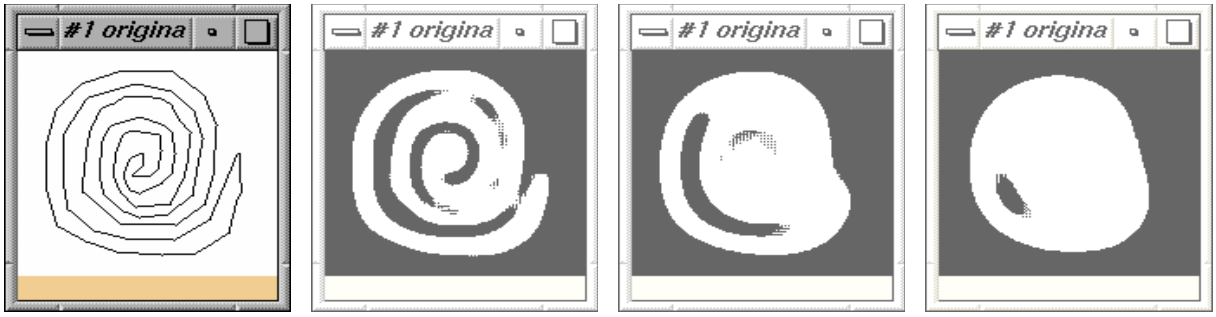


Fig. 19. *4ème séquence* : *Δt = 0.98. Δx = Δy = 1. Diffusion = 0.5. Réaction = 0.*
La précision de la méthode *brute*, visible sur cette séquence, a sa contrepartie ! Il aura fallu 2000 incrémentations pour arriver à la dernière image (environ 4 minutes, taille de l'image = 150*150) . On peut remarquer la valeur encore limite de la diffusion.

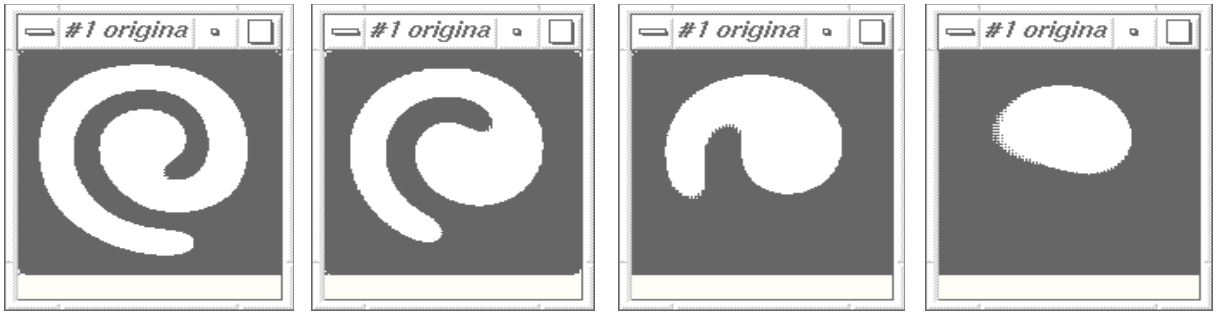


Fig. 20. *5ème séquence* : *Δt = 0.98. Δx = Δy = 1. Diffusion = 0. Réaction = 0.5.*
L'absence de diffusion, qui a besoin d'une approximation du gradient, sous la forme des différences finies centrées (qui est suffisante du fait de l'effet stabilisateur de la viscosité), i.e. l'utilisation de la réaction seulement, est une situation prétexte à instabilités. Ici, on reprend l'exemple de l'utilisation des différences finies centrées, appliquées à l'approximation du gradient, en relation avec le terme de réaction et ceci sur une forme.

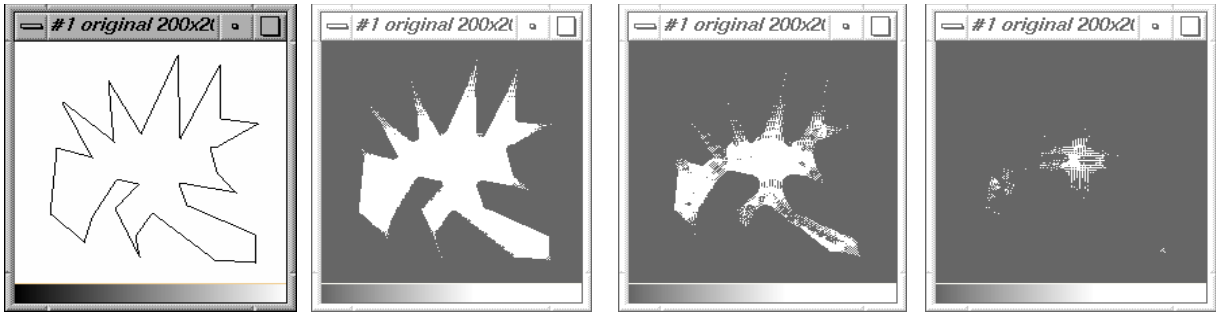
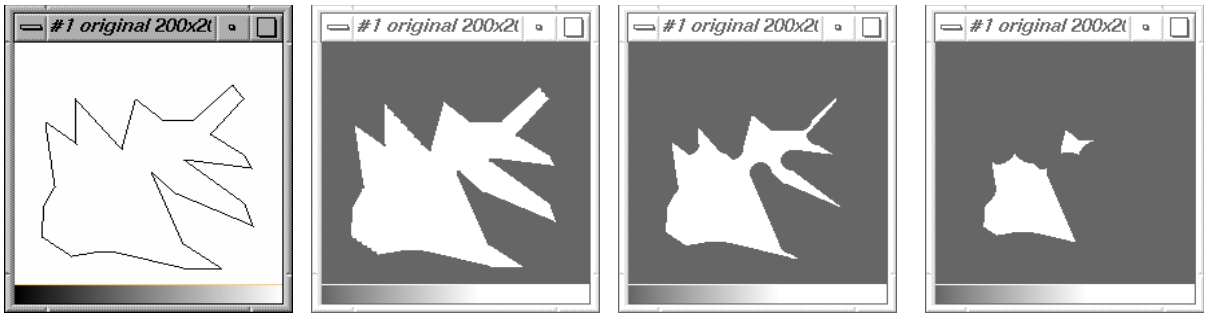


Fig. 21. *6ème séquence* : *$\Delta t = 0.98$. $\Delta x = \Delta y = 1$. Diffusion = 0. Réaction = 0.5.*
L'abandon du modèle numérique page (n), c'est à dire l'abandon de *toutes* approximations (de la norme) du gradient via le terme de réaction, permet en somme de se recadrer dans une situation stable *semi-stationnaire* : le front ne fait que parcourir la carte distance au fur et à mesure que le temps avance. L'algorithme *Fast Marching* fait de même en se donnant une condition supplémentaire d'entropie totale par *construction de Huygens*. En outre, on n'a pas accès à la courbure dans cette dernière.



Résultats sur l'image :

Du fait de la lenteur des calculs, cette méthode n'a pas été implémentée en propagation avec dépendance à l'image.

Conclusion :

Cette méthode est la méthode de base pour une implémentation précise de la formulation Eulérienne, même en l'absence du modèle numérique présenté page (n). Il faut alors être vigilant sur l'utilisation des paramètres, lesquels peuvent entraîner la propagation dans des instabilités divergentes. Cependant, l'inconvénient principal, la lenteur des calculs s'effectuant sur l'image entière, empêche une utilisation efficace par rapport aux enjeux actuels en image, qui réclament des méthodes rapides.

732. La méthode *Narrow Band.*

Algorithme :

```
Nouveau_front  =  Initialisation_front( piles, autres attributs ).
Créer_narrow_band( piles, autres attributs ).
Pour i depuis 0 jusqu'à Fin_propagation :
                Afficher( Nouveau_front).
                Calculs_narrow_band( piles, autres attributs ) .
                Nouveau_front  =  Sélection_nouveaux_pixels( piles, autres attributs , TP1 ).
                Créer_narrow_band( piles, autres attributs ).
Refaire.
Fin._
```

Détails des fonctions :

- **Initialisation_front(** piles, autres attributs **).**

Le front peut être initialisée de plusieurs façons que nous ne détaillerons pas ici. En particulier, la définition d'une bulle à l'aide de la souris est une méthode possible. Ce front initialisé = Nouveau_front.

- **Créer_narrow_band(** piles, autres attributs **).**

A partir du front (distance 0)= Nouveau_front, création d'une carte distance grâce à l'algorithme où les piles sont indexées par le carré de la distance. Cela permet de créer une bande autour du front de taille déterminée par l'utilisateur. Les calculs suivant s'effectuant sur tous les points de la bande, il vaut mieux choisir une taille de bande minimale, permettant quand même l'accès à la courbure (calcul des dérivées secondes), donc à un masque 5*5. Cela donne une largeur optimale de bande de 5 pixels.

La valeur de la fonction *Courbes_de_niveaux* sur la bande est donc toujours réinitialisée comme la carte distance à Nouveau_front.

- **Calculs_narrow_band(** piles, autres attributs **)**.

Les calculs utilisent la même relation que celle de la méthode *brute*.
Les valeurs de la fonction *Courbes_de_niveaux* ne sont donc remises à jour q'une seule fois.

- **Sélection_nouveaux_pixels(** piles, autres attributs , TP1 **)**.

En dehors de la définition d'une bande autour du front d'intérêt, la différence majeure avec la méthode brute réside dans le fait qu'on doit trouver explicitement les points (pixels) correspondant au nouveau front à partir des niveaux mis à jours de la fonction *Courbes_de_niveaux*. Cela se fait grâce à un test d'interpolation qui est le suivant :

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A, B, C, D, E, F, G, H, I sont les valeurs de la fonction *Courbes_de_niveaux*. Le test s'effectue sur le point de valeur E (point central).
Test = signe (valeur_absolue(4E + 2D + 2F + 2H + 2B + A + C + G + I) - TP1) ;
TP1 est un critère réel qui module donc le niveau de connexité du nouveau front, comme on peut le constater dans les résultats suivants.

Résultats sans dépendances à l'image (angiographie 2D) :

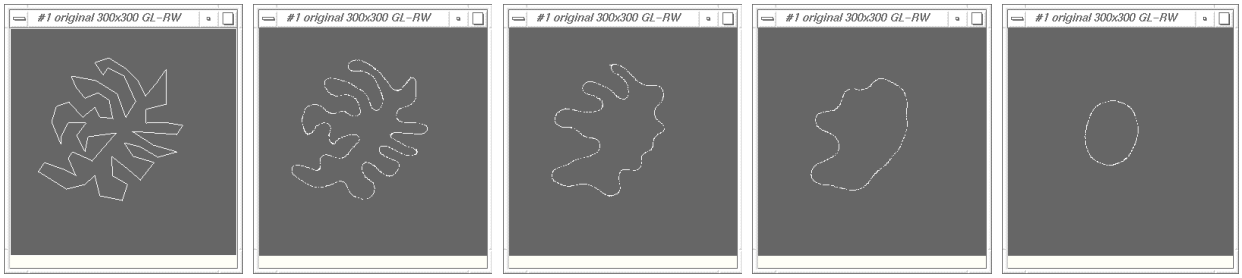


Fig. 22. *1ère Séquence : Δt = 0.98. Δx = Δy = 1. Diffusion = 2.4. Réaction = 0. TP1 = 7.0.*
Le *niveau de connexité* du front est déterminé par un critère de sélection des nouveaux points d'intérêt du front entre deux réinitialisations de la carte distance. Ce test permet de définir au mieux les pixels concernés par le passage du niveau zéro réel de la fonction *courbes de niveaux*. Différents critères de sélection ont été testés avant d'aboutir à un critère de type interpolation sur un masque 3*3 centré sur le pixel à tester, ce qui permet d'envisager les *coins* du pixel (le pixel étant vu comme un carré).
Cette séquence, ainsi que la suivante, est relative à une diffusion pure : on a la propagation d'un front dont la vitesse suivant la normale en chaque point est déterminée entièrement par la courbure, d'où l'effet visqueux constaté. Le nombre d'itérations entre chaque image n'est pas déterminé : les images ont été sauvegardées à intervalle régulier. Une fois que le front a atteint le stade du cercle, la vitesse de propagation diminue fortement.

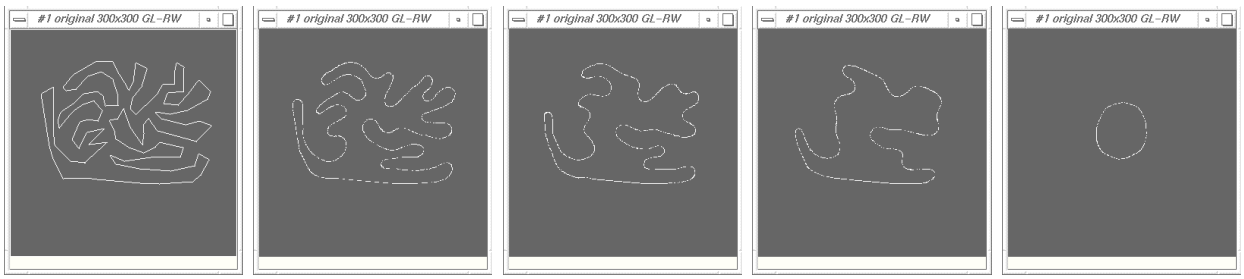


Fig. 23. *2ème séquence : Δt = 0.98. Δx = Δy = 1. Diffusion = 2.4. Réaction = 0. TP1 = 6.0.*
Cette séquence est équivalente à la précédente sur le plan algorithmique, mais le *niveau de connexité* a été diminué, via le critère de sélection. Il en résulte plus de trous dans le front. Ceci est autorisé et intrinsèque à la méthode *Narrow Band*, qui continue à être stable malgré la non connexité apparente du front. Cela confirme le

côté englobant de la formulation Eulérienne : ce n'est pas un front qui se propage mais un volume de données qui changent de valeurs : le front est enchâssé dans ce volume de données.

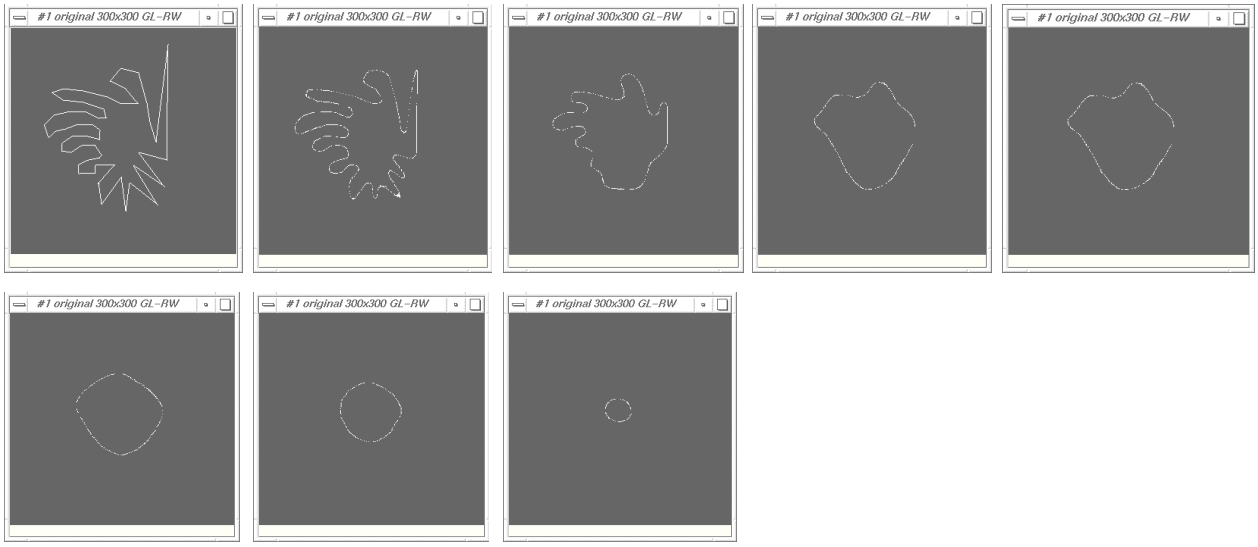


Fig. 24. *3ème Séquence : Δt = 0.98. Δx = Δy = 1. Diffusion = 2.4. Réaction = 0. TP1 = 5.0.*
Le *niveau de connexité* a été exagérément diminué : un important trou dans le front apparaît sur la droite. Malgré cela, il retrouve en fin de séquence la forme théorique du cercle induite par le *théorème de Graysons*. On a donc un double effet stabilisateur dû à la viscosité et à la réinitialisation de la carte distance. D'où : effacement de l'histoire des instabilités possibles, donc de la propagation des effets oscillants au niveau des singularités (dû à la réinitialisation) et lissage de ces oscillations (dû à la viscosité).

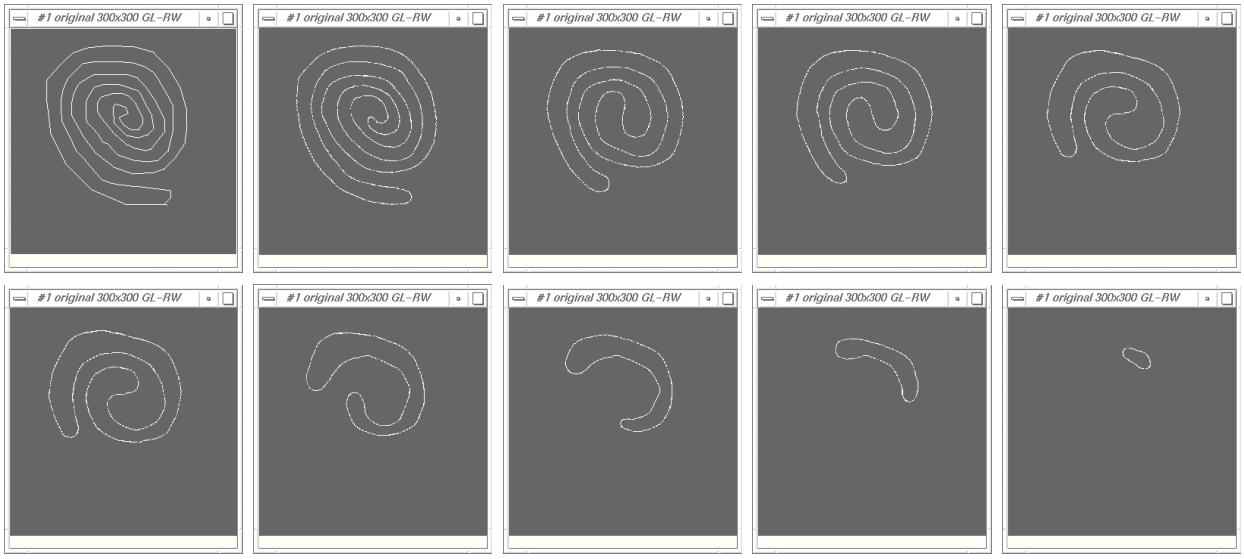


Fig. 25. *4ème Séquence : Δt = 0.98. Δx = Δy = 1. Diffusion = 2.4. Réaction = 0. TP1 = 8.0:*
Vérification du théorème de Graysons pour la méthode *Narrow Band* : le front, lors de son évolution, ne doit pas se recouper, c'est à dire former des singularités de type shocks du 2nd ordre.

Les caractéristiques de l'image :

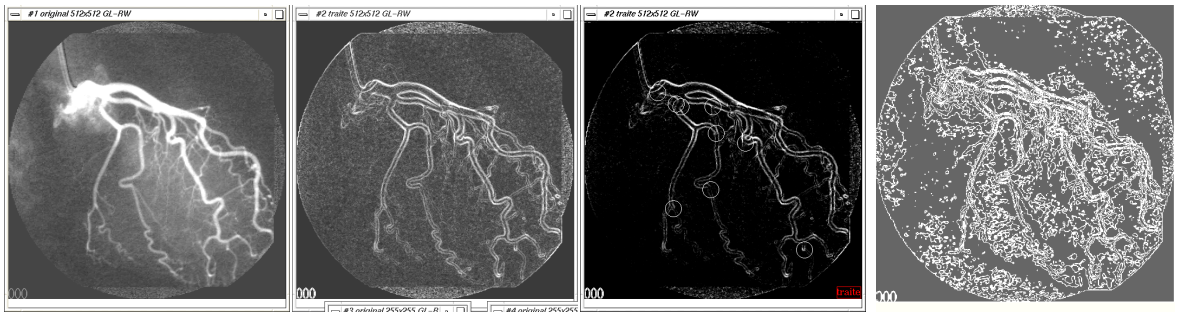


Fig. 26. (image de 1 à 4)
Image 1 : image originale (angiographie du réseau vasculaire cardiaque).
Image 2 : norme du gradient de l'image, normalisée à [0,255[.
Image 3 : les trous et les artefacts du gradient (très important).
Image 4 : les isointensités de l'image.

Résultats avec dépendance à l'image :

numéro	réf .bmp	diffusion	réaction	dép.im.	dép.gr	T	Tp1
1	im1	-1.7	-1.3	95	4	1.5	12
2	im2	1.7	,,	,,	,,	,,	,,
3	im3	1.7	,,	,,	,,	2.5	9
4	im4	-1.7	,,	,,	,,	,,	,,
5	c1	-2	-2	,,	,,	1.5	12
6	c2i	,,	,,	,,	,,	3	,,
7	e1	-1	,,	90	7	1	10
8	e2i	,,	,,	,,	,,	,,	8
9	e3	,,	,,	,,	,,	,,	12
10	g2	2	-1	85	4	1.5	,,
11	g3	0.5	,,	,,	,,	,,	8
12	g4	0	,,	,,	,,	,,	,,
13	g5	-0.5	,,	,,	,,	,,	,,
14	g1	-2	,,	,,	,,	,,	,,

Illustration de la différence de comportement du front quand la viscosité diffère. Les mêmes paramètres ont été utilisés, hormis la diffusion, positive dans un cas et négative dans l'autre. On peut remarquer aussi le défaut, spécifique à cette version de la méthode *Narrow Band*, lié à la sélection de nouveaux points d'itérations en itérations pour créer un nouveau front : on peut avoir dans certains cas une extension de la zone d'intérêt (niveau 0 de la fonction *courbes de niveaux*) sur une grande surface (zones en noir).

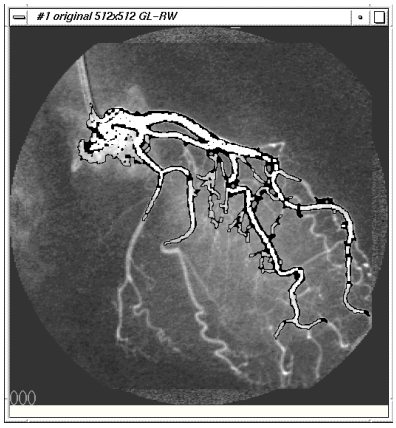


Image 1.

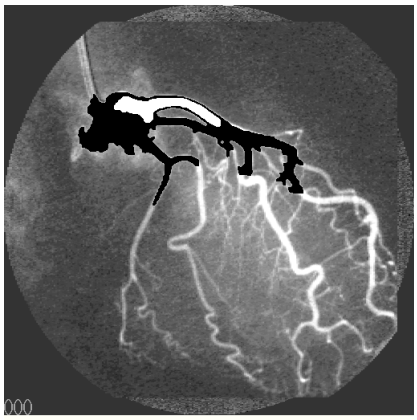


Image 2.

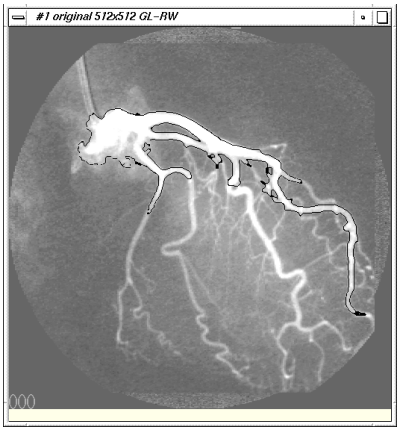


Image 3.

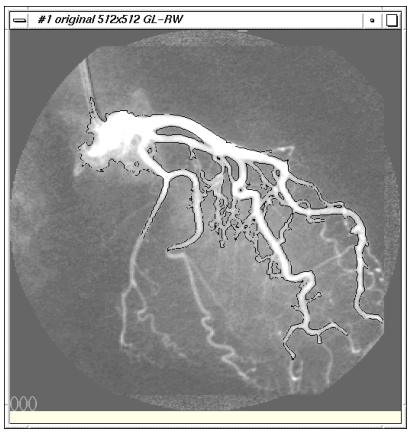


Image 4.

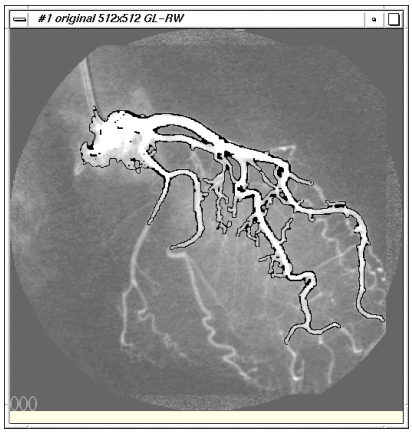


Image 5.

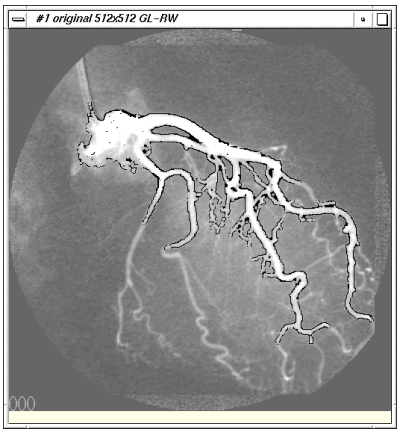


Image 6.

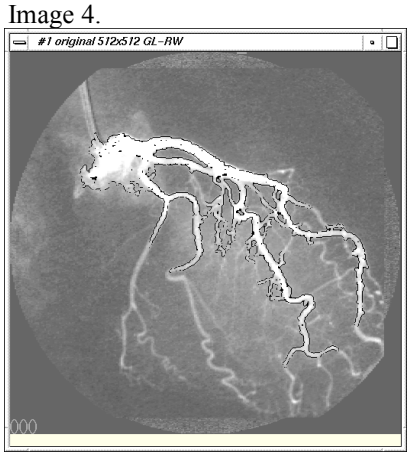


Image 7.

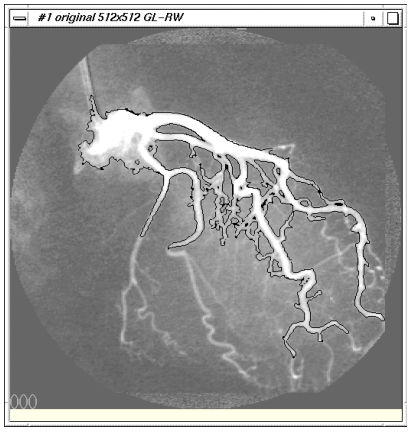


Image 8.

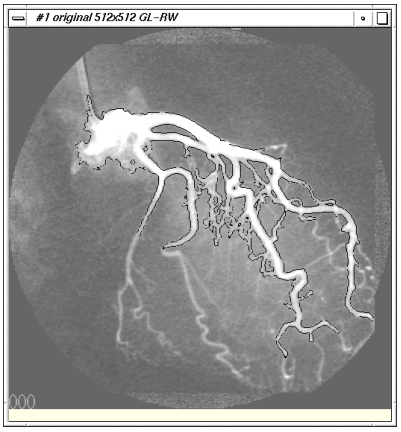


Image 9.

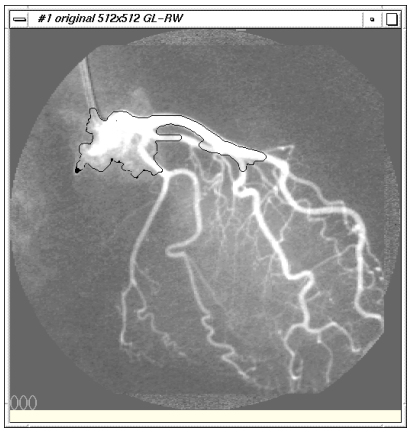


Image 10.

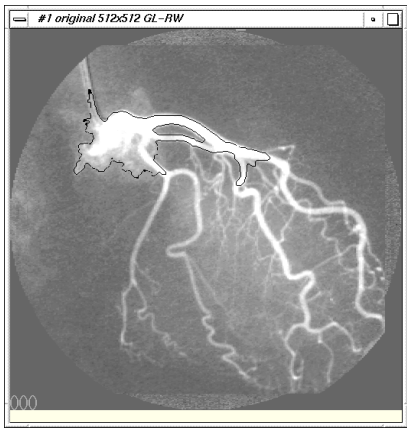
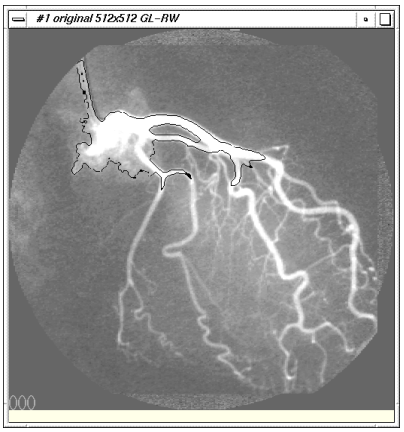
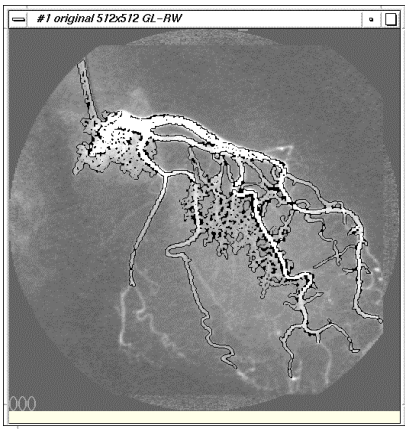


Image 11.



Images 12, 13 et 14 .



Commentaires :

Cet algorithme n'est pas unique [8] [10] [12]. Il existe d'autres versions de la méthode *Narrow Band* qui réinitialise la carte distance à intervalle régulier d'itérations, ce qui permet de profiter un peu de la précision de la méthode *brute*. La différence majeure avec la méthode *brute* est la sélection des nouveaux points pour le front de l'itération suivante, ce qui fait passer du domaine réel de la fonction *courbe de niveaux* au domaine discret. Cela a deux conséquences :

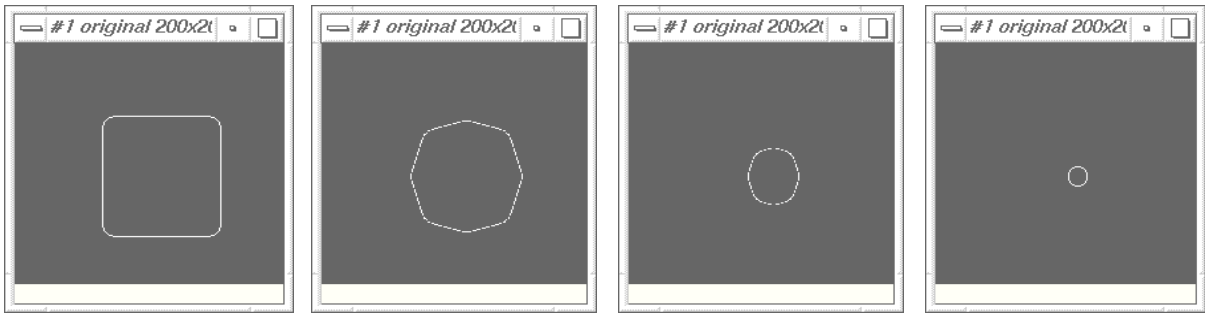
- quand la valeur de la vitesse ne permet plus (cela dépend du test de sélection TP1) la sélection d'un pixel autre que celui en cours, on a phénomène de stagnation du front, ce qui est très visible par exemple en diffusion pure pour les faibles courbures. Le recours à un incrément temporel plus fort ne résout pas le problème : l'entropie variationnelle en est affectée…D'où le recours à une courbure arbitraire, qui sera justifiée plus loin.
- la conséquence déjà évoquée et ce qui en découle : l'effacement de l'*histoire* de φ . Cela a déjà été largement discuté.

La vérification des propriétés essentielles liées à l'utilisation de cette méthode est illustrée par les séquences ***1***, ***2***, ***3*** et ***4***. Les séquences ***1*** à ***4*** illustrent parfaitement la vérification du théorème de Graysons. Des résultats analogues sont obtenus avec la méthode *brute* (page précédente), mais sur une image 300*300, cela prend beaucoup plus de temps. La séquence ***4***, représentant une spirale, est le cas de figure le plus sévère car il faut plus de temps (d'itérations) pour que le stade du cercle soit atteint. Le risque de shocks du 2nd ordre sur le plan numérique est lié à la précision de la méthode et le nombre d'itérations ! On voit que la méthode *Narrow Band* est suffisamment précise sur la séquence ***4*** pour ne pas engendrer ce type de shocks. Par ailleurs, quelque soit la méthode, il est indispensable qu'un interstice d'au moins deux pixels ou plus existe entre les zones parallèles (pour la spirale, c'est le cas) de la frontière de forme. En effet, l'approximation de la courbure utilise un masque 5*5 pour l'accès aux dérivées secondes. Un interstice plus petit engendre normalement un *shock* du 2nd ordre ou plus.

La vérification du théorème est une bonne indication sur le comportement de la méthode : la méthode *brute* renvoie toujours à la convergence vers un cercle, qui est l'indice d'un bon comportement.

En ce qui concerne la méthode *Narrow Band*, une courbure arbitraire (un seuil obligatoire de viscosité : quand la courbure est en dessous de ce seuil, elle est remplacée par ce seuil) dans les algorithmes prend le relais de la courbure principale, qui, quand elle est forte, induit une propagation.

Mais en dessous d'un certain seuil, la propagation ne tient plus compte des courbures faibles : la forme tend vers un hexagone au lieu de tendre vers un cercle. La séquence suivante met en évidence ce comportement, quand cette courbure arbitraire n'est pas prise en compte :



Quand cette courbure arbitraire est rajoutée, on obtient le cas de la séquence ***4***.

Toutes les applications avec tentative de segmentation sur les données angiographiques sont relatives à la méthode Narrow Band. Il ne semble pas que ces résultats dépendent de la méthode, on va voir pourquoi, ce qui laisse penser que la méthode Narrow Band a un comportement viable par rapport à la donnée d'une plage de valeurs pour Δt, ce qui assure le respect de l'entropie variationnelle, mais pas forcément de la connexité, qui, elle, dépend du test de sélection. En outre, les images ***5*** et ***6*** montrent que les résultats au niveau segmentation diffèrent peu quand Δt ou *TP1* changent : l'influence principale provient du critère d'arrêt et de la viscosité.

Les images ***1*** et ***2*** montrent la différence de comportement quand la viscosité diffère. Une forte viscosité limite la propagation assez rapidement aux zones proximales (image ***10*** à ***14***). On peut constater en outre (images ***14*** par exemple) qu'une viscosité (diffusion) *négative* force le passage dans les zones de petits vaisseaux, au détriment de la sortie du front lorsqu'une faiblesse dans le gradient survient.

Au passage, cela confirme qu'il est possible, en utilisant une dépendance à l'image *g(I)*, de manœuvrer le front avec une diffusion négative.

Une fois que le front est sortie (voir à ce sujet les images ***34*** à ***37*** de la partie diffusion anisotropique), le résultat de la segmentation est quasiment liée à l'image seuillée (voir images ***30*** à ***32***) : la ressemblance entre l'image seuillée par un certain niveau de seuil et celle de la segmentation est frappante. C'est pour cela en partie que la propagation dans les deux petits vaisseaux de gauche n'est pas allé jusqu'au bout. Cela provient donc du critère d'arrêt, et de la dépendance à l'image utilisée. Le fait de s'en priver n'est pas meilleur : on segmente tout simplement toute l'image ! (cf. image ***34***). Il semble donc possible de segmenter toute l'arborescence, au delà de la partie proximale, en utilisant une diffusion négative, mais en faisant l'hypothèse irréaliste de compter sur une image de gradients sans artefacts (i.e. sans trous). On peut voir que l'origine de ces artefacts pour les images 2D présentées proviennent de la diffusion du produit de contraste, ce qui noie le gradient dans du flou. En revanche, l'utilisation d'une viscosité positive forte permet l'arrêt du front face à des artefacts pas trop important : comparer les images ***10*** à ***13***. Mais on ne segmente alors pas les parties de petits vaisseaux.

On peut donc remarquer l'importance du critère d'arrêt dans le résultat obtenu, ainsi que l'effet de la viscosité, dont les valeurs positive ou négative ont toutes deux des comportements intéressants. Seulement, les limites de la méthode sont celles relatives à l'EDP utilisée. La viscosité seule associée à l'espace de réaction /diffusion ne permet pas de segmenter l'ensemble du réseau vasculaire, à cause de la présence inévitable de trous dans le gradient, ensuite à cause de l'impossibilité d'utiliser une viscosité positive pour la propagation dans les petits vaisseaux.

Conclusion :

La méthode *Narrow Band* et ses dérivées représentent un gain de temps considérable par rapport à la méthode *brute* : la vitesse dépend de la taille de la *Narrow Band*, non pas de l'image toute entière. Par ailleurs, les résultats obtenus (le choix des 6 paramètres peut être vu comme un défaut : cf. les images) coïncidant avec ce qu'on attend d'une telle propagation et son arrêt dans des zones prévisibles au regard du critère d'arrêt utilisé, montre qu'il est possible d'avoir un contrôle sur la condition entropique variationnelle et son respect, afin que le front ne déborde pas en des endroits où il devrait s'arrêter. Les seuls débordements visibles correspondent bien aux *artefacts* du gradient de l'image. En ce qui concerne la condition entropie temporelle, elle est ignorée dans cette méthode. La connexité, quand à elle, est modulé par l'intermédiaire de *TP1*, ce qui représente aussi un défaut de la méthode.

D'autres versions de la méthode permettent de s'affranchir de ce test d'interpolation en réinitialisant le lieu de la *Narrow Band* tout en préservant l'histoire de la fonction *courbes de niveaux* : la difficulté est alors de construire en temps réel la bande sans utiliser une propagation suivant une carte distance (la fonction créer_narrow_band, qui contient la construction optimale d'une carte distance par rapport à *nouveau_front*, réalise implicitement une propagation par *construction de Huygens* : tous les points de la frontière de la bande trouvée se trouve à même distance du *nouveau_front*).

Si on extrapole les résultats de cette méthode à ceux de l'EDP utilisée, on peut conclure en affirmant que les zones proximales où il existe un diamètre de vaisseaux supérieur à un certain nombre de pixels devront privilégier une diffusion fortement positive afin d'ignorer les artefacts où il existe quand même une barrière connexe de gradients, et une diffusion négative dans les petits vaisseaux afin de forcer le passage du front au risque de déborder à la moindre défaillance du gradient.

733. La méthode *Fast Marching.*

Introduction :

Cette partie est quasiment la traduction en Français de la référence [13].

Les schémas et commentaires sont donnés pour le 2D et s'étendent sans problème au 3D.

Considérons le cas spécial d'un front avançant avec une vitesse $F = F(x,y,t)$ soit positive en tous points, tout temps, soit négative. On a un front dont la formulation par *courbes de niveaux* est de la forme :

$$\phi_t + F(x, y)|\nabla\phi| = 0 \tag{38}$$

$$\phi(x,y,t=0) = \Gamma \tag{39}$$

Ici, le front se propageant ne sera pas considéré comme le niveau 0 des *courbes de niveaux*, mais comme le niveau t d'une fonction *temps* $T(x,y) = t$:

Formulation par courbes de niveaux : $Front = \Gamma(t) = \{ (x,y) \mid \phi(x,y,t) = 0 \}$

Formulation stationnaire : $Front = \Gamma(t) = \{ (x,y) \mid T(x,y) = t\}$

La surface $T(x,y) = t$ vérifie alors l'équation suivante :

$$|\nabla T| F = 1. \tag{40}$$

Cette équation dit simplement que le gradient du temps, quand le front arrive en t, est égal à l'inverse de la vitesse d'arrivée. Intuitivement, on peut comprendre en considérant l'EDP (38) et en supprimant la partie gauche ϕ_t. Alors le front n'est plus le niveau 0 de ϕ mais le niveau t d'une surface paramétrée $T(x,y)$ qui vérifie l'équation (40), puisqu'on ne dérive plus ϕ par rapport au temps t.

Cela est une forme de la bien connue équation d'Eikonal : la vitesse ne dépend pas de l'orientation du front, cela implique que le front dépend de variables indépendantes au front uniquement (la courbure est une variable dépendante).

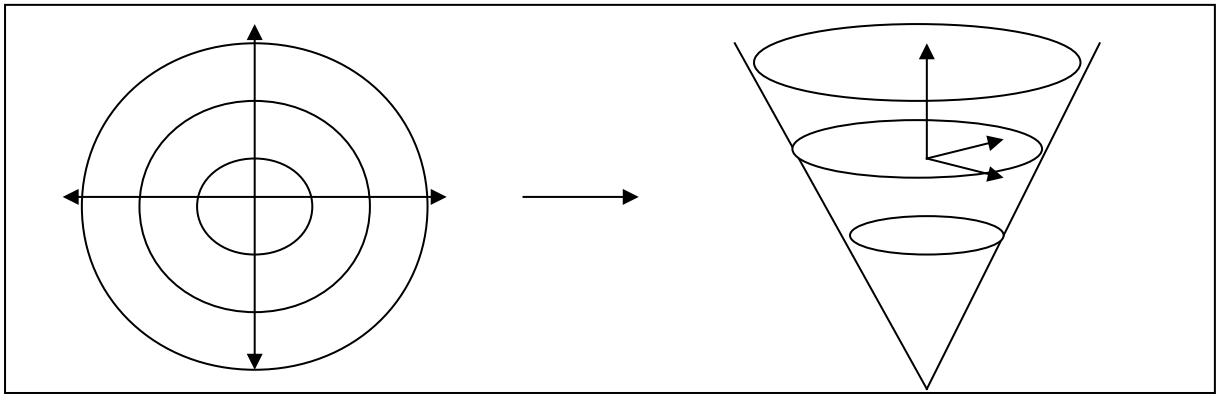


Fig. 27. Représentation en projection et en 3D de la formulation *stationnaire* avec un vitesse égale à l'unité : le front est le niveau *t* d'une surface paramétrée *T(x,y) = t.*

On se donne alors de cette manière une condition entropique temporelle sur le front, grâce à la monotonie permanente de la vitesse F . Cela réfère à un point de vue *stationnaire* de la formulation Eulérienne.

Le schéma numérique découlant de l'équation d'Eikonal est bien connu et s'écrit :

$$[\max^2(D_-^x T_{ij},0)+\min^2(D_+^x T_{ij},0)+\max^2(D_-^x T_{ij},0)+\min^2(D_+^x T_{ij},0)]=\frac{1}{F_{ij}^2} \tag{41}$$

Ce schéma a la forme d'une équation à résoudre, équation quadratique pour la valeur à trouver en chaque pixel (on suppose qu'on connaît en tous points la valeur de T et on calcule le T suivant en un point particulier). Cela induit une construction en temps réel de la surface paramétrée $T(x,y) = t$. Supposons la surface construite jusqu'à $T(x,y) = 10$. Alors tous points (x,y) dont la valeur de T est inférieure ou égale à 10 ont reçu leur valeur de T définitive, en relation avec la condition entropique temporelle.

Un deuxième schéma existe, dû à Rouy et Tourin, et s'écrit :

$$\max^2(\max(D_-^x T_{ij},0),-\min(D_+^x T_{ij},0))+\max^2(\max(D_-^y T_{ij},0),-\min(D_+^y T_{ij},0))=\frac{1}{F_{ij}^2} \tag{42}$$

Ce schéma est un peu plus performant que le précédant (pour plus de précisions, voir [n]).

Algorithme :

(1) **Initialisation :**

- **(a)** Soit ***alive*** le label des points intérieurs au front initial. Ce sont donc les points de la forme qui va se propager. La valeur de T initiale de ces points est 0, en référence à l'*instant* 0 duquel le front commence à se propager. Ce label 0 (ou autre pour les points qui vont suivre et faire partie de ***alive***) ne change plus jamais ensuite.
- **(b)** Soit ***narrow band*** le label des points voisins à la forme initiale, voisins donc de ***alive***. Le type de voisinage associé peut être un 4- ou 8-connexité. On a donc une ***narrow band*** de taille 1… Pour ces points, T est initialisé suivant T_{ij} = dy / F_{ij}. En pratique, on peut prendre dy = 1.
- **(c)** Soit ***far away*** le label des points qui ne sont ni ***alive*** ni ***narrow band***. Pour ces points, T a une valeur indéterminée, qui ne sert pas pour l'algorithme. Dans les papiers de Sethian, cette valeur est infinie, afin que le schéma numérique précédant trouve toujours un $\max^2$(opérateur(T_{ij}),0) ou $\min^2$(opérateur(T_{ij}),0) égal à 0.

(2) **Boucle :**

- **(a)** Soit (i_{min} , j_{min}) le point de ***narrow band*** dont la valeur de T est minimum.
- **(b)** Ajouter le point (i_{min} , j_{min}) à ***alive***.
  L'enlever de ***narrow band***.
- **(c)** Considérer comme voisins tous les points dans le 4-voisinage (ou 8-voisinage) de (i_{min} , j_{min}) qui ne sont pas ***alive***. Si le point est dans ***far away***, alors le mettre dans ***narrow band***. Si le point est dans ***narrow band***, alors le laisser avec ce label.
- **(d)** Reconstruire la valeur de T pour tous ces voisins, en ne considérant que les voisins (du voisin en question…) compris dans ***alive*** et en résolvant l'équation (41) ou (42).

Commentaires :

La sélection du point à *reconstruire* (on reconstruit la valeur de T associée) se fait donc sur le *T minimum* : on reconstruit sur le pixel qui possède la vitesse de propagation maximum. Il est prouvé qu'alors, on trouve par reconstruction des valeurs obligatoirement supérieures au T minimum en cours pour les points voisins considérés. Intuitivement, c'est comme si on propageait l'information des T minimums vers les T maximum. On voit que cela amène en supplément une condition entropique variationnelle, et donc une condition entropique

totale sur la propagation du front. Une preuve que cet algorithme aboutit à une condition entropique totale peut être trouvée dans [n]. Par construction, on a donc quelque chose de très proche du principe de construction de Huygens, pour lequel la condition entropique totale est respectée, en s'ajoutant la possibilité d'un champ de vitesse différent de 1 (voir les remarques faites au chapitre 2.).

Par ailleurs, cette méthode est extrêmement rapide car il existe à chaque itération au moins un point visité et relabellisé ***alive***, du fait du principe de construction algorithmique, ce qui différencie nettement le *Fast Marching* des deux méthodes précédentes. Le principal inconvénient de la méthode est qu'on n'a pas accès à la courbure et donc à tout comportement de type visqueux. En outre, elle est extrêmement stable et rapide.

Il ne faut surtout pas confondre l'équation d'Eikonal et le schéma numérique sous jacent avec l'équation suivante :

$$T.F = 1 \tag{43}$$

qui ne correspond pas à une interprétation *stationnaire* des équations (38) et (39).

Résultats :

La méthode a été testée en advection pure, sans dépendance à l'image, en référence à un champ de vitesse précalculé. L'accès à un champ de vitesse peut être dynamique, le champ lui même pouvant changer à tout instant, à condition que l'hypothèse de base soit conservée (F toujours positive ou négative) . Le cas de l'équation (43) a aussi été programmé en utilisant l'algorithme précédent mais en considérant l'équation (43) pour reconstruire les valeurs de T dans ***(2)(d)*** : on prend directement $T = 1/F$. Ceci pour mettre en évidence les différents concepts introduits pour décrire le comportement des fronts : entropie, connexité, stabilité… Pour toute les séquences, le mode d'affichage fait apparaître tous les points labellisés ***alive***.

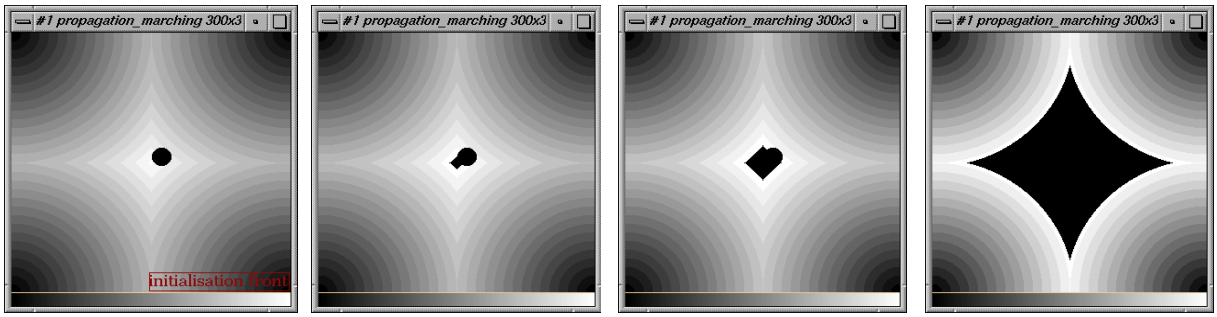


Fig. 28. Propagation en *fast marching* suivant l'équation (43) dans un champ de vitesse qu'on peut directement interprété en fonction des niveaux de gris de l'image. Le cas (43) procède par recherche systématique de la vitesse la plus grande par construction de Huygens : le front suit le champ de vitesse…par remplissage de bassins versants : cela n'est pas en accord avec une propagation basée sur toute EDP de type (38). Si en tout point du front, la vitesse est non nulle (c'est la cas ici), alors tous les points du front devraient se propager avec la vitesse en question. On va bien que cela n'est pas le cas.

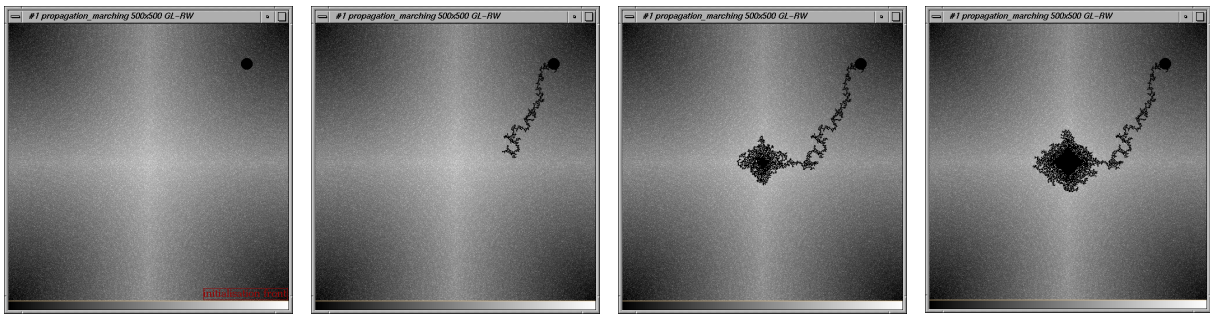


Fig. 29. En outre, toujours en utilisant l'équation (43), si on initialise la bulle ailleurs et si on rajoute du bruit (ici Gaussien), l'équation (43) montre immédiatement ses limites : la recherche systématique de la plus grande vitesse se traduit par une succession de *shocks* du 1er ordre. Cela remet en question l'intégrité du front. Cela dit, on peut remarquer que le mode de construction des points du front, basé sur l'algorithme précédent, respecte l'entropie variationnelle, la connexité, ainsi que l'entropie temporelle. Mais la définition de front est perdue.

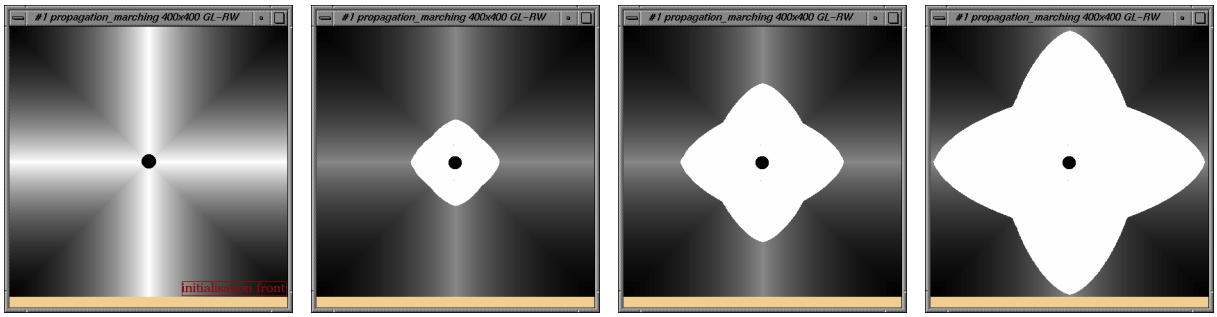


Fig. 30. Propagation en *fast marching*, suivant le modèle (41). Cette propagation est en accord avec ce qu'on peut attendre d'une EDP de propagation de front : tout point du front se propage avec une vitesse proportionnelle à la valeur locale du champ de vitesse. Ici, le champ de vitesse est l'exponentielle de la distance au sens 4-connexité_aux 4 coins de l'image (les lieux des points de même distance prennent la forme d'un carré : voir chapitre 2.), modulé par un paramètre.

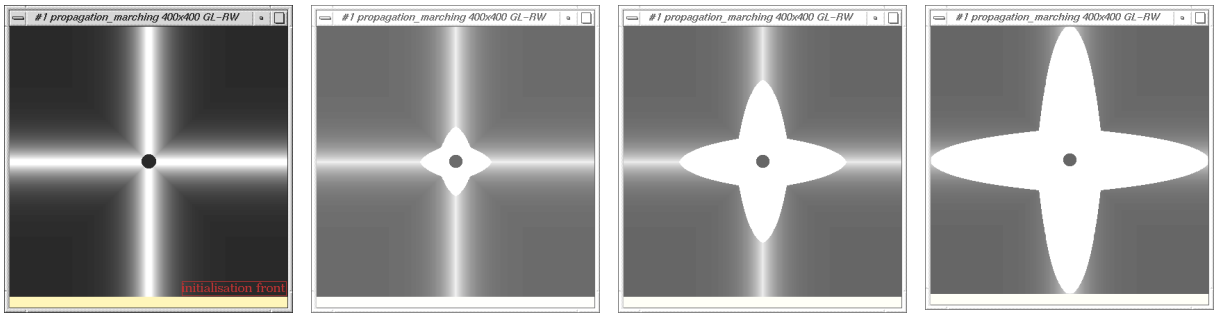


Fig. 31. Propagation en *fast marching*, suivant le modèle (41). Le paramètre modulant a été modifié, afin de donner plus d'importance à l'exponentielle.

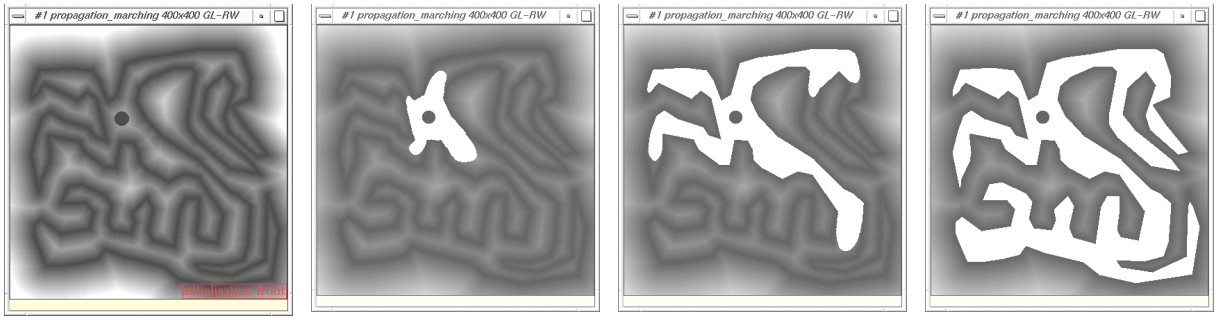


Fig. 32. Propagation en *fast marching*, suivant le modèle (41). Ici, le champ de vitesse est égale à la carte distance d'une courbe prédéfinie à l'aide de la souris : le lieu des distances nulles se trouvent sur cette courbe. On peut constater que le front s'arrête sur ce lieu des vitesses nulles. Le lieu connexe des plus grandes vitesses est le squelette de la forme.

Commentaires :

Ce qui n'a pas été quantifié jusqu'à maintenant, c'est l'un des deux avantages principaux de la méthode. Hormis une entropie totale, qui garantie au front une stabilité parfaite et qui est bien visible sur les séquences précédentes grâce au mode d'affichage, l'autre avantage est la vitesse.

En fait, l'efficacité de la méthode sur le plan vitesse dépend du mode de stockage des données *T(x,y)*. Celle-ci doit fournir la solution la plus efficace pour aller chercher le *T min* en temps réel, et cette structure de données doit contenir tous les points avec leur valeur de *T* correspondante. Elle doit aussi pouvoir classer les nouvelles valeurs de *T* trouvées.

Une solution évoquée dans [n] est d'aller chercher le T_{ij} dans une structure de données de type bintree (en Anglais : min-heap data structure). Cela en fait la solution la plus performante sur le rapport rapidité/ précision.

Néanmoins, la solution utilisée pour tous les résultats part d'une idée simple qui s'avère efficace : il suffit de stocker les T_{ij} dans un tableau de piles, l'indice du tableau devant être entier. Pour avoir accès à un entier et conserver une forme de classement pour les T_{ij}, la formule suivante a été utilisée sur le plan algorithmique :

……..

fifo_add((int) (T[i][j]*CRITERE) , point)

……..

où point est une structure (au sens du langage C) retournant les coordonnées du point en rapport avec *T* et fifo_add(.) une routine spécifique à une librairie de manipulation de piles. Sans rentrer dans les détails, on peut dire que l'avantage de ce type de stockage est une très grande rapidité : on a directement accès au *T min* et classer le nouvel arrivant *T* est tout aussi direct. L'inconvénient est mis en image sur la séquence suivante. En dessous d'une certaine valeur pour CRITERE, le stockage est trop imprécis : il confond des valeurs de *T* différentes en les incluant dans une même pile.

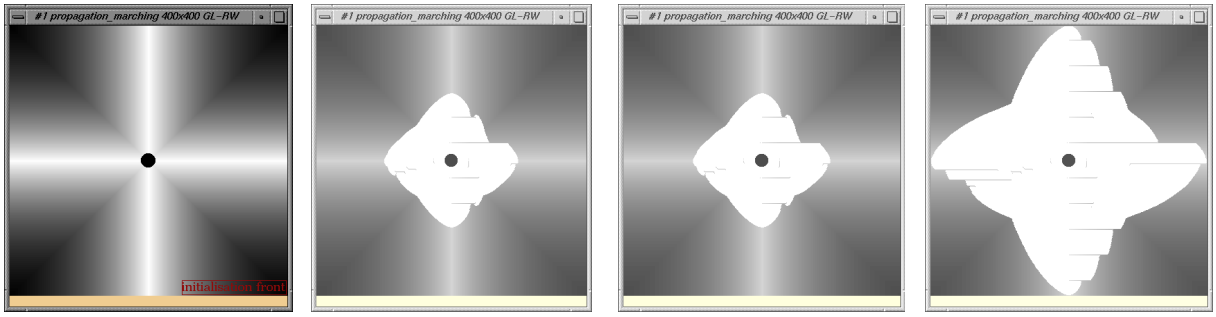


Fig. 33. Propagation en *fast marching*, suivant le modèle (41). Le défaut dû au mode stockage des données apparaît nettement. Ici, CRITERE = 50.

Pour les autres résultats, il a été pris suivant le champ de vitesse (le seuil optimal pour CRITERE dépend du champ de vitesse), des valeurs comprises entre 100 et 500 pour CRITERE.

Alors la vitesse résultante est de 5 secondes au maximum pour couvrir toute l'image 400*400.

Conclusion :

La méthode *Fast Marching* est le fil conducteur pour une implémentation rapide et stable de l'EDP (38). Cependant, les hypothèses limitatives sur la forme de la vitesse est un inconvénient majeur, qui empêche de se situer dans un cadre visqueux (pas d'accès à la courbure grâce aux formules (3) (3') (3'') provenant de la donnée d'une carte distance). Des connexions intéressantes sont à établir entre le champ de vitesse et son influence sur la propagation du front et le *watershed* établi à partir d'une transformation sur ce champ de vitesse.

La méthode *Hermès*.

Introduction :

La méthode *Hermès* est un méthode récemment développée à l'INRIA Sophia Antipolis, qui permet une optimalité au niveau vitesse, et concilie les avantages dus au *Fast Marching* et la possibilité d'un accès à la courbure [19] [22] [23]. C'est pour cela qu'elle a été utilisée par l'équipe Niçoise dans un objectif de détection de mouvement avec comme idéal le temps réel, ce qui en fait ainsi une méthode alternative à l'analyse statistique Markovienne de l'image.

Algorithme :

L'algorithme présentée est issue de la référence [19].

```
Set Initial Contour( )
Set Active Pixels( )
While (Largest Velocity() != 0)
{ site = Select Largest Velocity( )
  Evolve Level Set( site , neighbors )
  Add Neighbors Active( site )
  Reestimate Velocity( site , neighbors )
  If ( Active Pixels > Threshold )
   {  Smooth Char Image( )
      Find Contour Position( )
      Set Active Pixels( )
   }
}
```

Commentaires :

L'idée clé de la méthode *Hermès* est de se baser non pas sur le point qui possède le *T minimum* mais sur celui qui possède la vitesse maximale [19]. L'algorithme sélectionne ce pixel et réévalue ses caractéristiques en utilisant la formulation Eulérienne (ce qui n'est pas fait dans le *Fast Marching*). Les pixels affectés par cette opération voient leur caractéristiques elles aussi modifiées, en particulier la réévaluation de la vitesse.

On a donc une évolution au sens *Courbes de niveaux* dans un voisinage local, ce qui permet à cette évolution de ne pas être tributaire du calcul sur toute la *Narrow Band* (on évite ainsi les phénomènes de stagnation du front) : cet avantage qui rappelle celui du *Fast Marching* autorise une grande vitesse de propagation.

Pour éviter des phénomènes variationnels comme on en trouve dans les résultats de l'algorithme *Narrow Band,* la position du front est réactualisé au travers d'un filtrage de la zone locale labellisé *active*.

Résultats :

Cet algorithme n'a pas été implémenté.

74. Conclusion.

On a pu constater au travers des différents algorithmes existants la richesse que possède la formulation Eulérienne en ce qui concerne l'évolution de critères topologiques et la propagation de fronts.

Ses avantages indéniables en font un outil privilégié pour tous problèmes variationnels, et l'algorithme *Hermès*, le plus rapide et le plus efficace, doit constituer l'algorithme de référence pour des traitements ultérieures de type segmentation.

Cela ne doit pas empêcher de se recadrer sur une autre EDP, qui inclut dans son champ d'action le problème lié aux artefacts dans l'image du gradient : une approche *snake* avec un front enchâssé dans une formulation Eulérienne par le biais de *Hermès,* semble être le futur le plus prometteur.

8. Les perspectives envisageables.

81. Au niveau des prétraitements.

En se donnant une EDP particulière, la tentative d'obtention de meilleurs résultats repose sur la possibilité d'un prétraitement et le choix des meilleurs paramètres vis à vis de l'EDP utilisée [32].
La formulation Eulérienne étant peu sensible au bruit, du moins dans les grands vaisseaux où le contournement est possible, le prétraitement devra apporter une contribution au niveau de l'amélioration de l'image du gradient, c'est à dire boucher les trous.
Un traitement connu sous le nom de diffusion anisotropique a l'avantage d'effectuer un filtrage sélectif, où l'effet de diffusion de l'information peut être modulé par une fonction *c(x, y, t)*.
En outre, l'intérêt d'un tel filtrage au niveau algorithmique est de reprendre directement les calculs inhérents à la formulation Eulérienne en diffusion pure, c'est à dire la courbure approximée grâce aux différences finies centrées, pour effectuer la diffusion.
L'algorithme de la méthode *brute* a été utilisé, sans effectuer de filtrage Gaussien, répondant ainsi à la formule suivante (équation (12) sans préfiltrage Gaussien) :

$$u_t = (c(|\nabla u|)) \,.\, |\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) \tag{12}$$

avec :

$$k = div(\vec{N}) = div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}$$

et

$$|\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{1/2}}$$

On part du fait que les isointensités de l'image *u(x,y,t)* possèdent la propriété fondamentale d'une carte distance : celle de donner implicitement (leur distribution évoquant comme la carte distance une surface paramétrée) la direction du gradient.
On peut donc à proprement parler de propagation des isointensités, et la courbure agit à la manière d'une viscosité. Donc, d'après le *théorème de Graysons*, aucune isointensité ne provoque de *shocks* et on ne doit pas voir d'instabilités se développer sur l'image d'itération en itération.
Cependant, en première hypothèse, le fait d'avoir en entrée une image plutôt qu'une carte distance ne change rien aux condition de stabilité intrinsèque qu'est la *CFL condition*. Il faudra tenir compte de celle ci si on ne veut pas obtenir des cas aberrants instables (explicitement : Δt trop grand).
Suivant l'EDP (12) avec en entrée les niveaux de gris de l'image (et au regard des formules relatives à la courbure et à la norme du module du gradient), cela correspond à une propagation en diffusion pure (effet visqueux uniquement), en admettant a priori que l'équation (5) n'est pas respectée (on n'a pas forcément la norme du module du gradient égal à 1) :

$$|\nabla u| \neq 1.$$

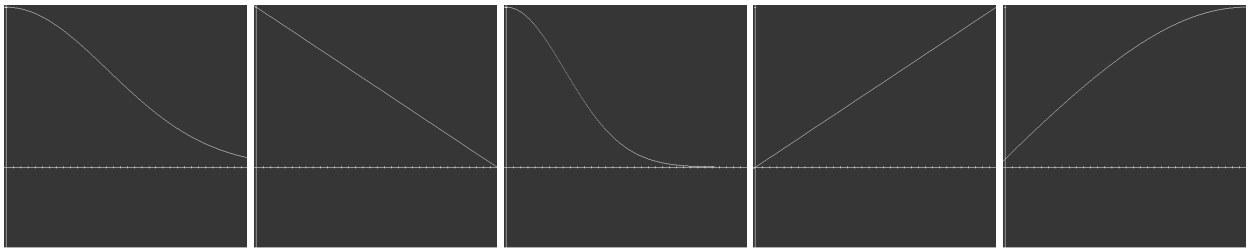
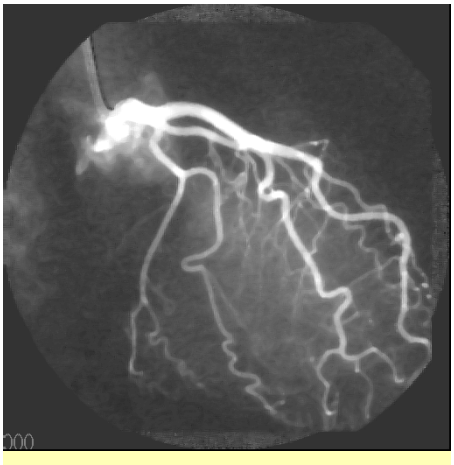


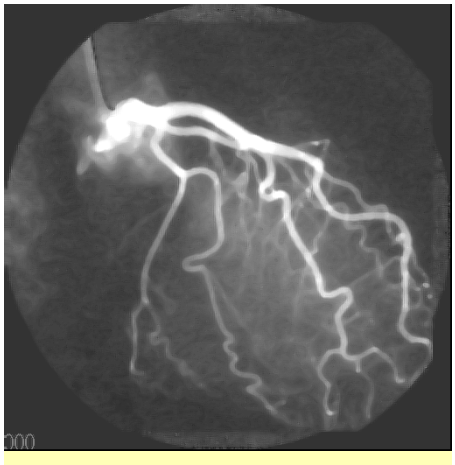
Fig 34. Fonctions *c(x,y,t)* 1 à 5 (respectivement de gauche à droite) modulant la diffusion anisotropique. Les graduations sont explicites : le point le plus à droite représente la norme maximum du module du gradient sur lequel va travailler ces fonctions.

Résultats de la diffusion anisotropique :

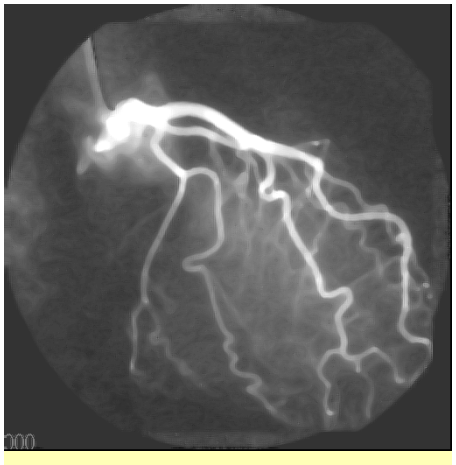
Résultats de la fonction 1 :



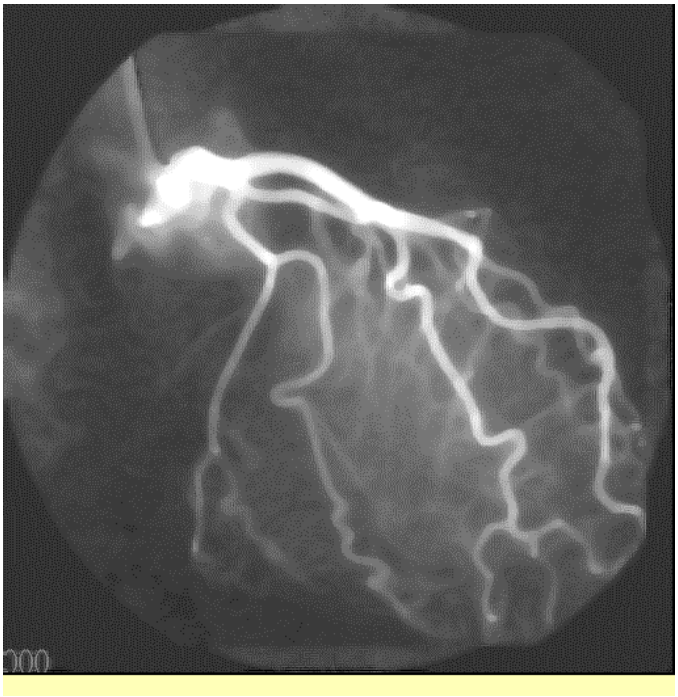
1. Itération 10.



2. Itération 20.



3. Itération 30.



4. Itération 40.

Résultats de la fonction 1:

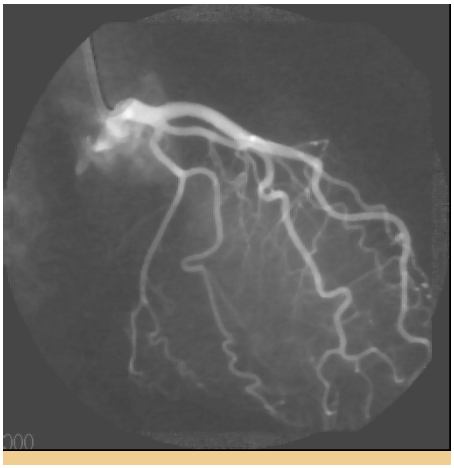
5. Itération 10.

6. Itération 20.

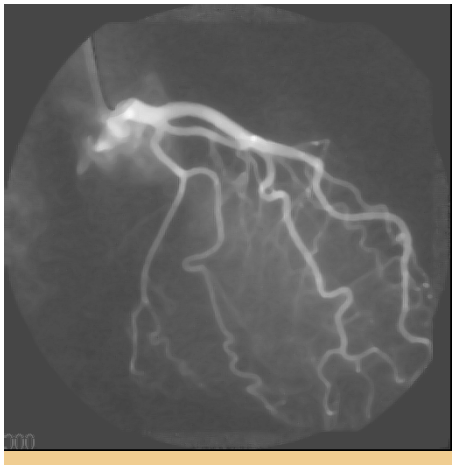
7. Itération 30.

8. Itération 40.

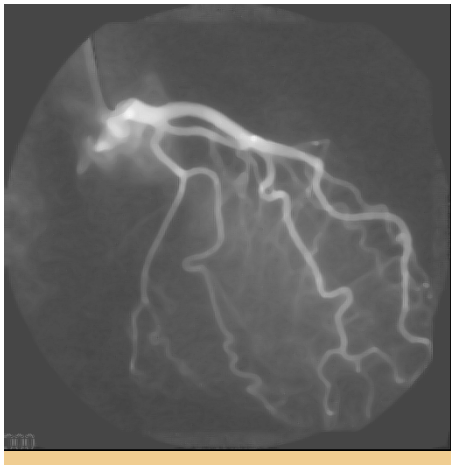
Résultats de la fonction 2:



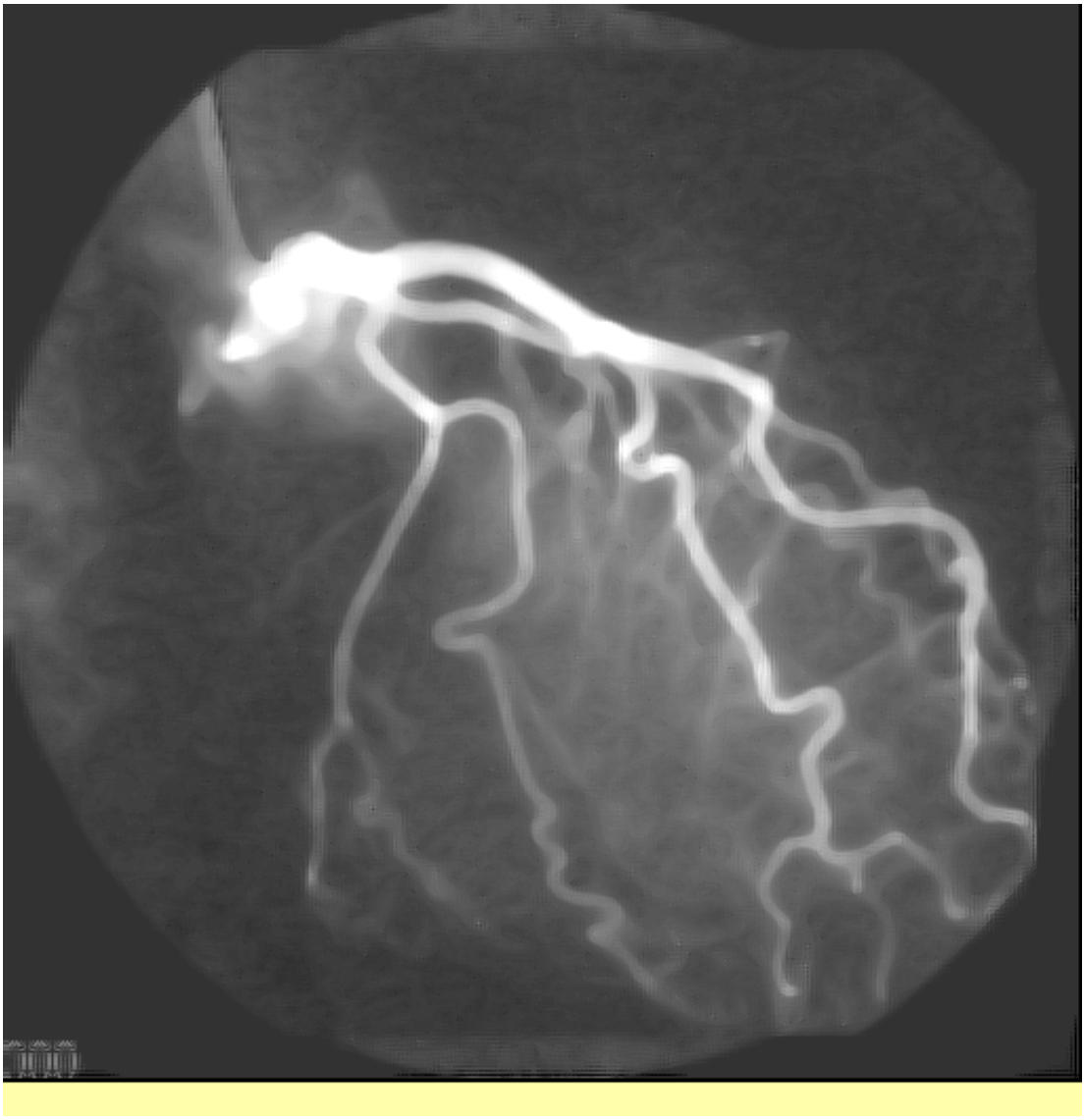
9. Itération 10.



10. Itération 20.

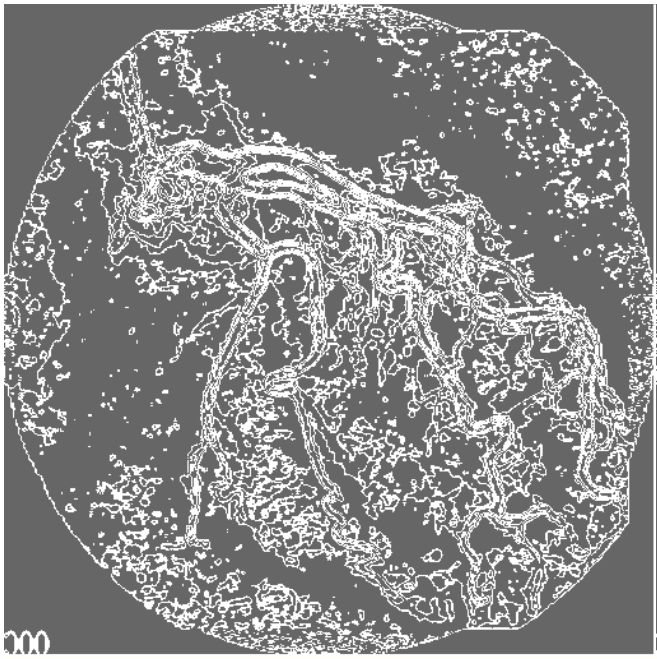


11. Itération 30.

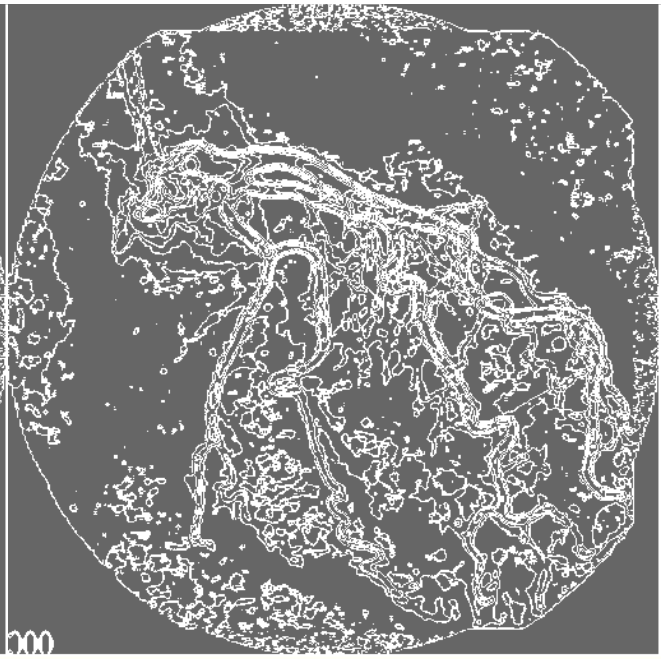


12. Itération 40.

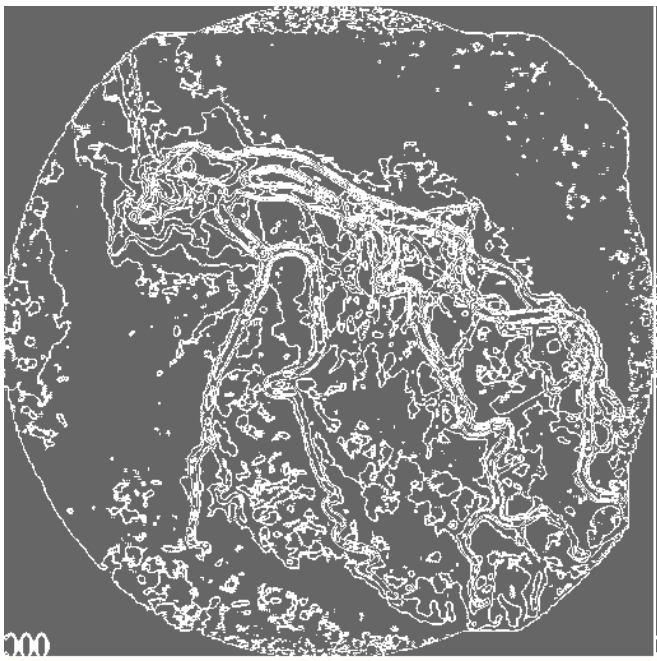
Résultats de la fonction 3: au regard des isointensités de l'image (pas de 17)



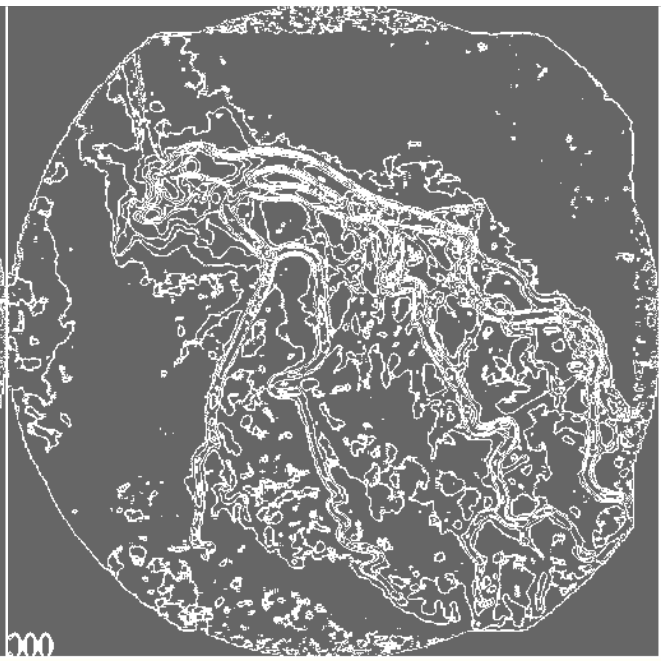
13. Itération 0.



14. Itération 1.

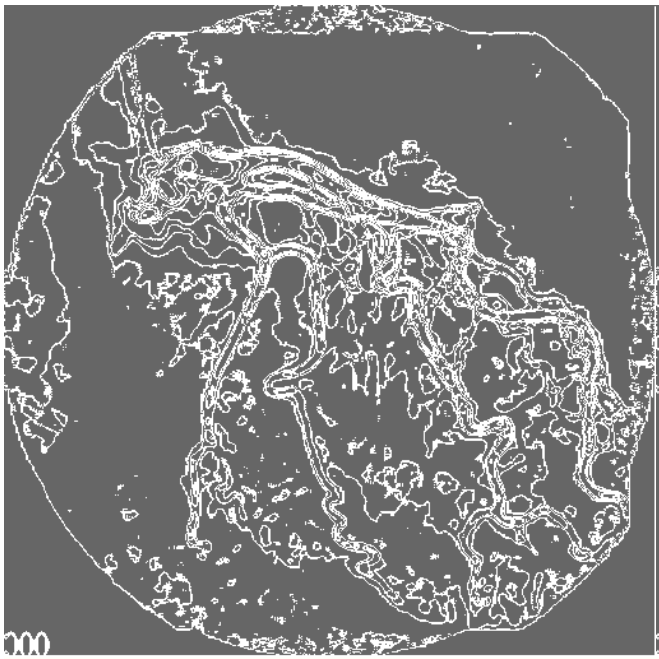


15. Itération 2.

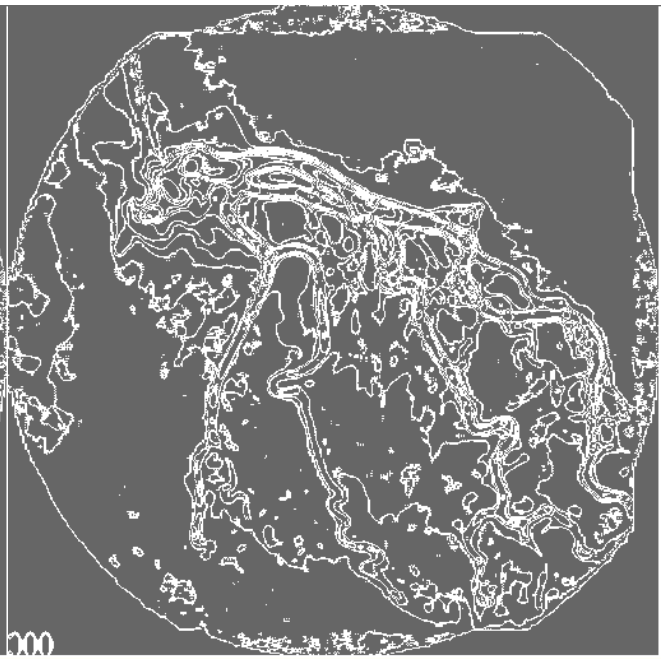


16. Itération 3.

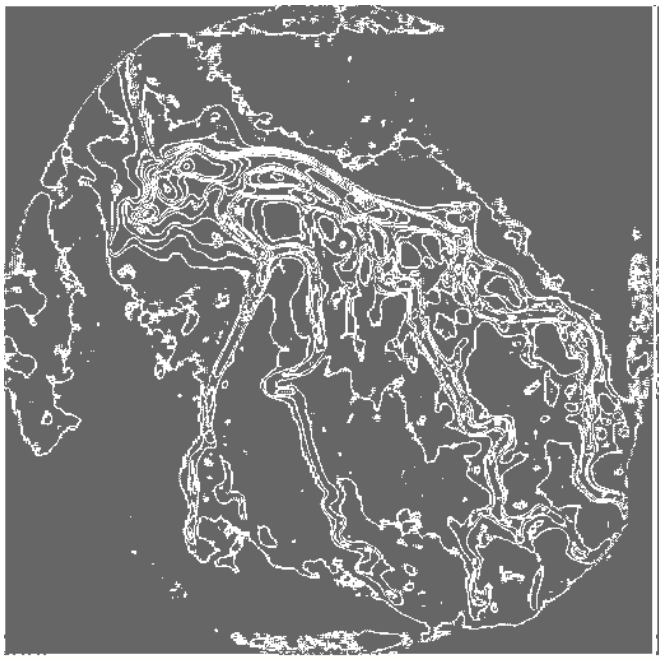
Résultats de la fonction 3 (suite) : au regard des isointensités de l'image (pas de 17).



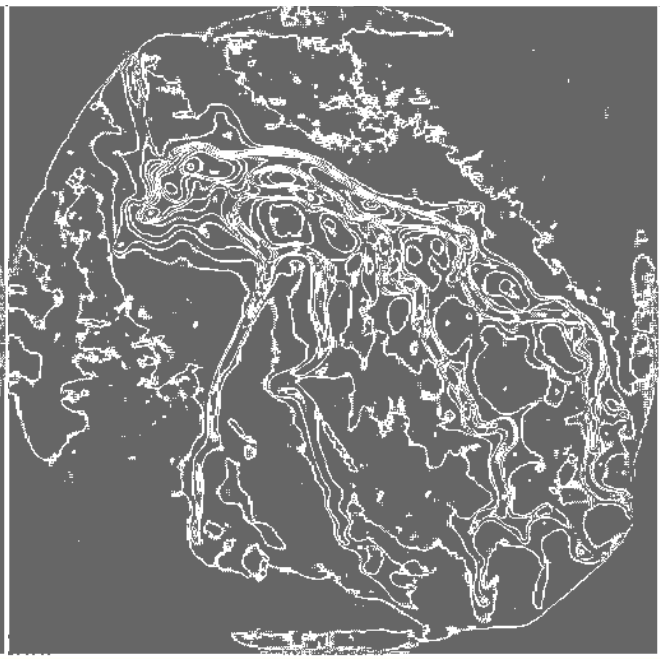
17. Itération 5.



18. Itération 7.

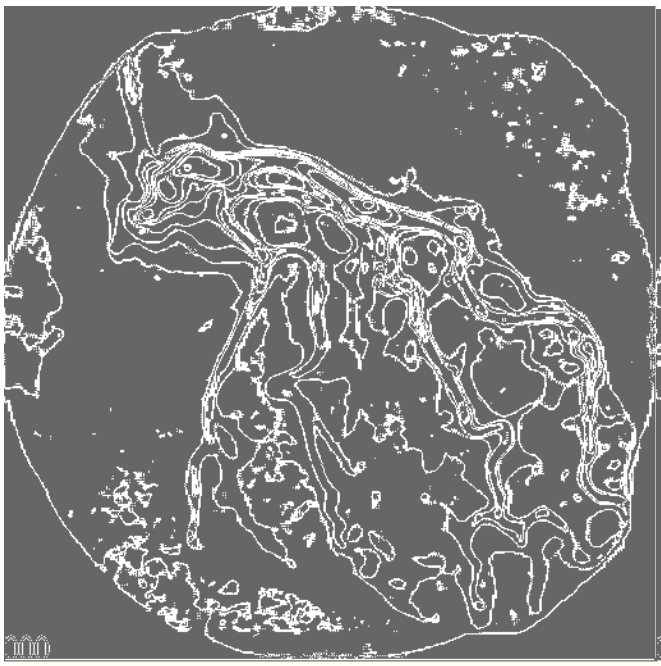


19. Itération 13.

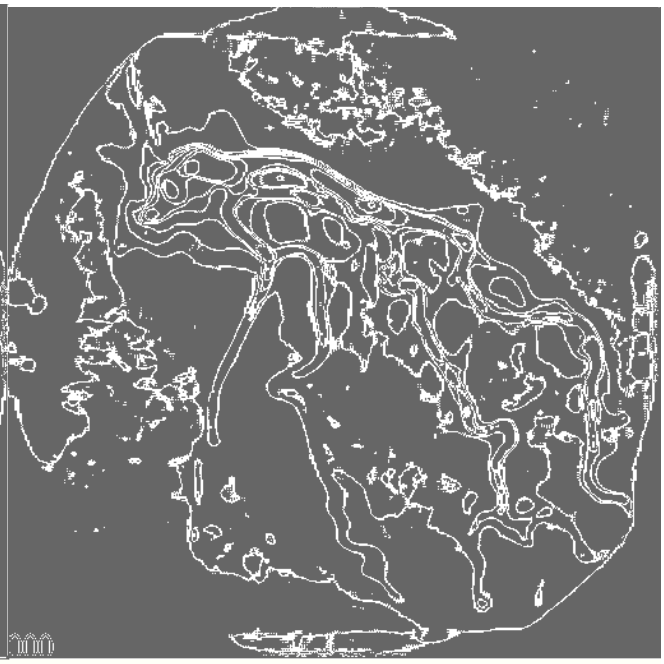


20. Itération 14.

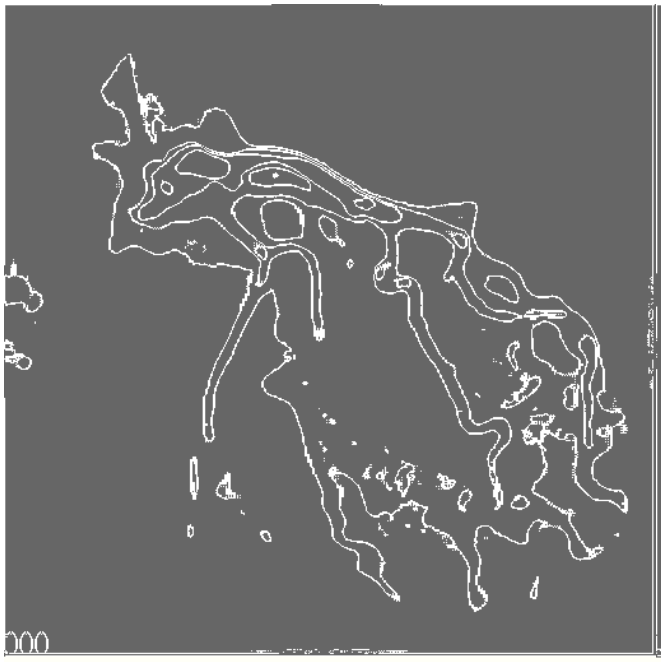
Résultats de la fonction 3 (suite) : au regard des isointensités de l'image (pas de 17).



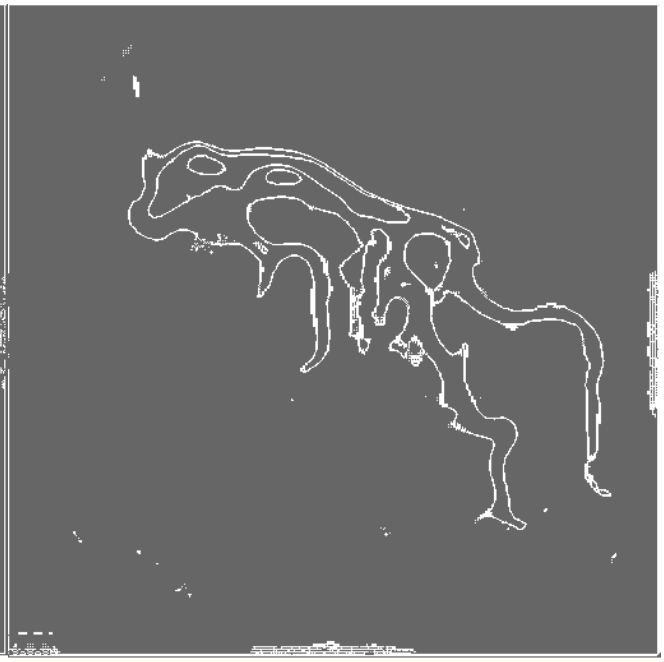
21. Itération 27.



22. Itération 28.

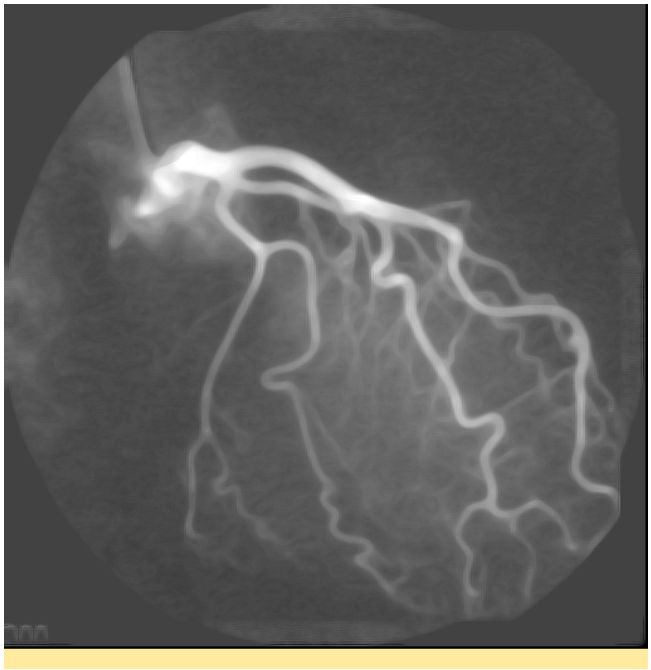


23. Itération 34.

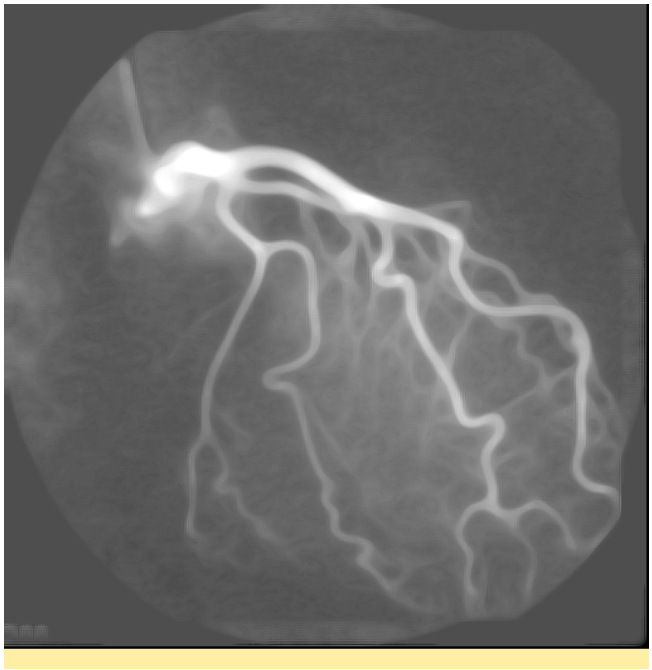


24. Itération 58.

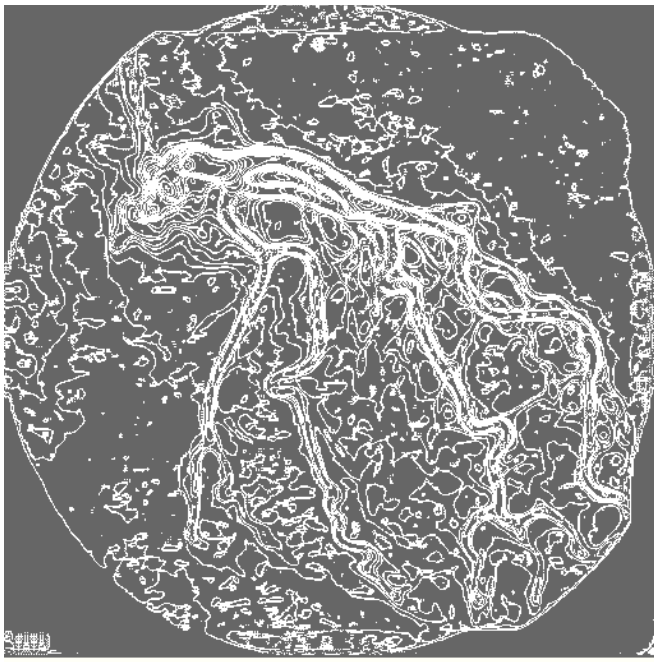
Résultats de la fonction 4:



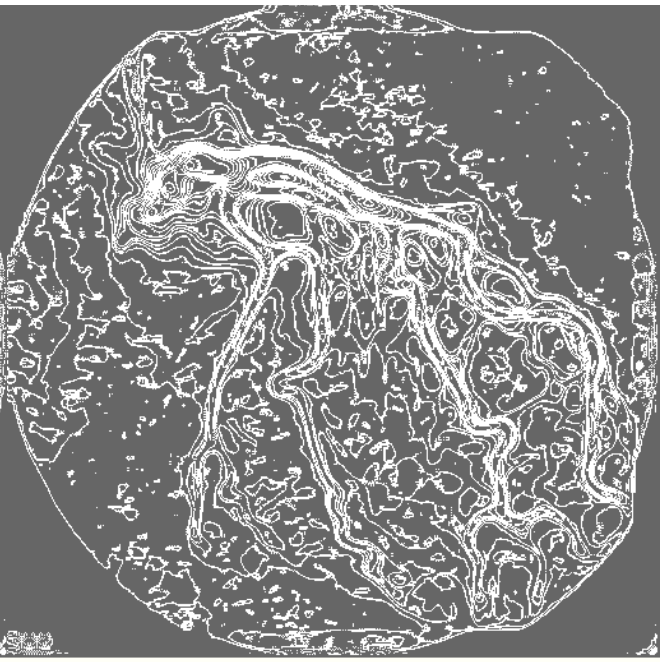
25. Itération 25.



26. Itération 50.



27. Isointensités : itération 33.



28. Isointensités : itération 57.

Résultats de la fonction 5:

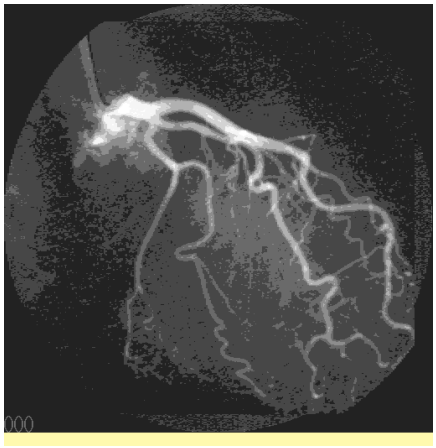
29. Gradient après 25 itérations.

Cet essai a été effectué avec une fonction privilégiant (cf. les fonctions) le filtrage des contours forts, sans diffusion dans les faibles gradients. On peut comparer cette image avec l'image des gradients ***8*** associée à la fonction 1 ou 2. Le résultat correspond à une réalité différente : dans le cas de l'image ***29***, il y a diffusion dans un espace confiné aux contours, ce qui explique l'effet de régularisation observé et la création d'information.
Le même type de résultat est observé avec la fonction 4.

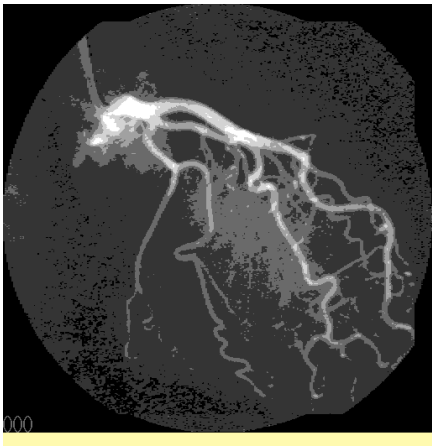
Les résultats confirment ce qu'on attend d'une telle diffusion : les fonction 1 à 3, qui représentent différentes fonctions *c(x,y,t)* filtrent le bruit tout en préservant les contours (l'épaisseur des zones de gradients forts est préservée). L'effet de diffusion fait que certains artefacts (trous) dans la zone proximale semble moins importants après diffusion.

En outre, un effet tout à fait intéressant est lié à l'utilisation des fonctions 4 et 5 qui cette fois ci privilégie la diffusion dans les forts gradients et en ne filtrant pas le bruit ou les gradients faibles. Le résultat en ***29*** montre un lissage du gradient qui est expliqué en commentaire de cette image .

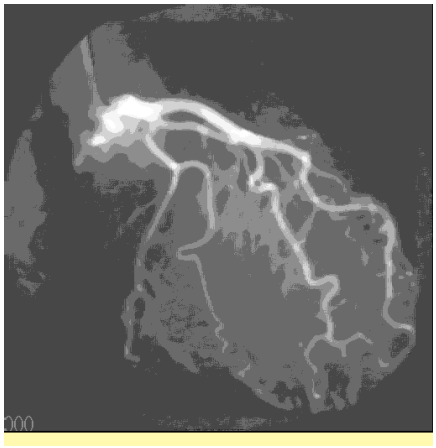
Résultats d'une propagation utilisant la méthode Narrow Band avec dépendance à l'image après diffusion anisotropique :



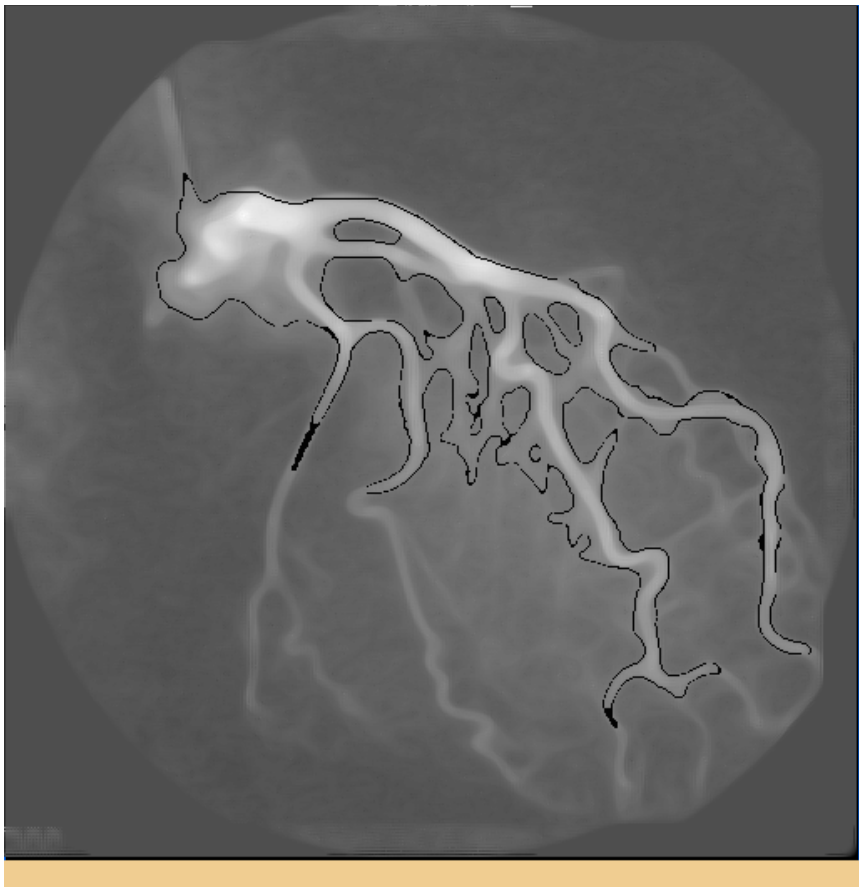
30. Seuillage de l'image originale. (pas de 20).



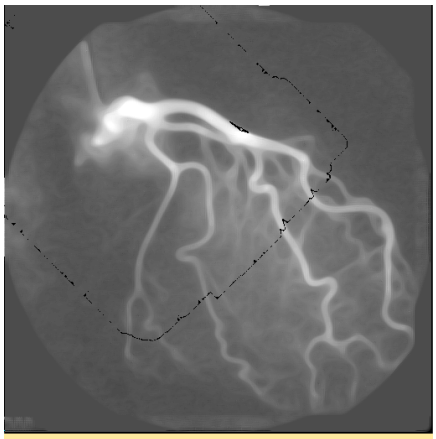
31. Seuillage de l'image originale. (pas de 27).



32. Seuillage après diffusion. (pas de 27).(F3). (après 10 itérations)



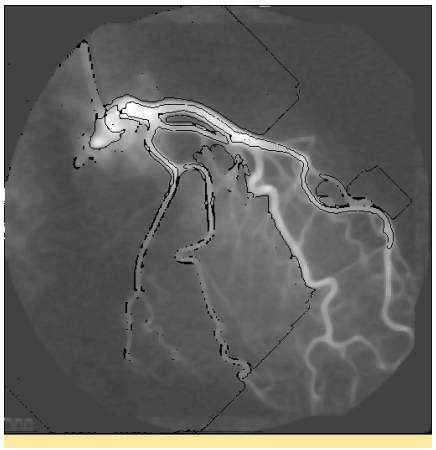
33. Propagation avec un effet visqueux. (fonction 4).(DA : 20 itérations).
Dim = 120. Réa = -1,5. Tem = 1,5.
Dgr = 25. Dif = 1,5. Tp1 = 9.



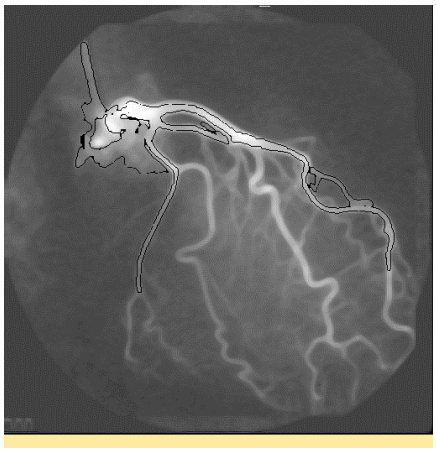
34. DA : 20 itérations.
Dim = 0. Dgr = //.
Dif = //. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.

35. DA : 10 itérations.
Dim = //. Dgr = 15.
Dif = //. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.

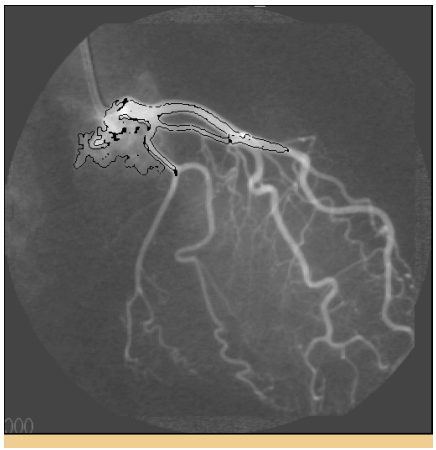
36. DA : 10 itérations.
Dim = //. Dgr = 10.
Dif = //. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.



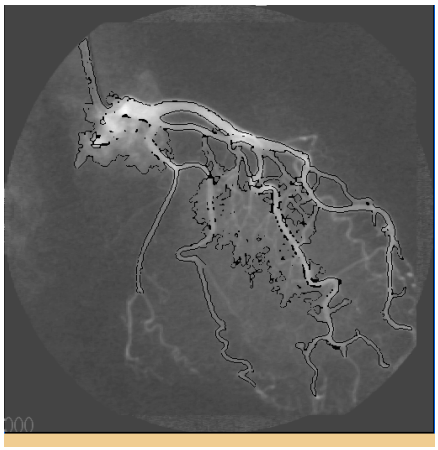
37. DA : 10 itérations.
Dim = //. Dgr = //.
Dif = -1,5. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.



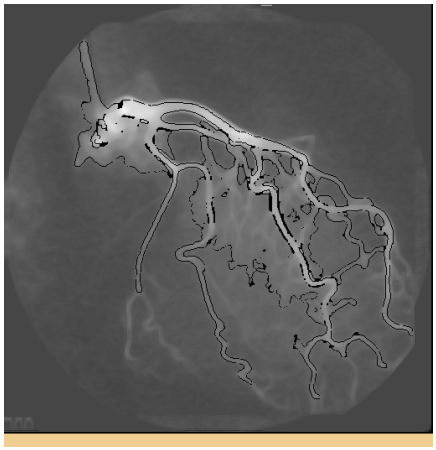
38. DA : 10 itérations.
Dim = 100. Dgr = //.
Dif = //. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.



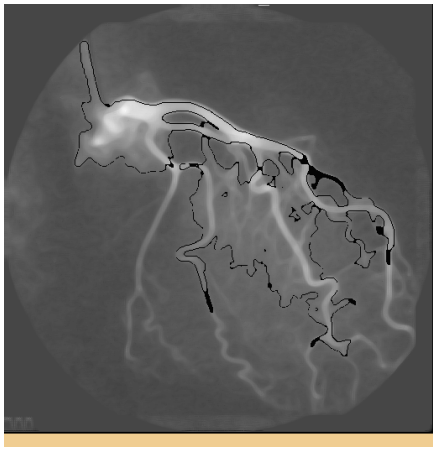
39. DA : 1 itération.
Dim = //. Dgr = //.
Dif = //. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.



40. DA : 1 itération.
Dim = //. Dgr = 15.
Dif = //. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.



41. DA : 10 itérations.
Dim = //. Dgr = //.
Dif = //. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.



42. DA : 10 itérations.
Dim = //. Dgr = //.
Dif = 2. Réa = //.
Tem = //. Tp1 = //.

La propagation après diffusion est décevante : il n'a pas été possible d'obtenir une meilleure segmentation au vu des résultats présentés de ***30*** à ***42***. L'effet de lissage et de propagations des isointensités, visible de ***26*** à ***37***, confirme néanmoins le comportement plus régulier du front après une diffusion.
L'application de la diffusion anisotropique sur les images 3D est à essayer, mais il faut savoir que cette méthode met autant de temps que la méthode *brute* pour les calculs car ils s'effectuent sur toute l'image.

82. Technique des bulles.

Indroduite par Tek et Kimia [4], dans un objectif de segmentation volumétrique, cette technique est une démonstration parlante des avantages offerts par la formulation Eulérienne.
On profite de sa facilité à gérer les changements topologiques : plutôt que de définir un seul front initial dans une zone particulière de l'image (en l'occurrence, pour les images 2D angiographiques, on introduisait le front initial sous la forme d'une bulle dans le vaisseau le plus consistant de l'arborescence), on définit plusieurs bulles dans l'image, à partir desquelles va se propager le front.
Les changements topologiques sont alors effectués, de par le cadre de travail Eulérien, sans problèmes : les bulles peuvent fusionner et ces fusions modifient en permanence la structure du front.
Dès lors, on entrevoit clairement les conséquences de la définition de plusieurs bulles : d'une part, on peut avoir un front (frontières des bulles) qui est défini sur *toute* l'étendue de l'image (la propagation ne va pas priviligier une zone particulière), d'autre part, et grâce à cette définition en quelque sorte *isotropique*, on a accès, moyennant l'utilisation d'une technique algorithmique appropriée, à une initialisation *automatique* du front initial dans l'image puisqu'on ne privilégie pas une région particulière.
A partir de là, peut-on espérer un résultat pour la segmentation qui est encore plus *global* que celui apporté par une seule bulle initiale ?
Si le but ultime demeure la segmentation *parfaite* de l'arborescence (celle qui correspond à notre perception visuelle de l'image), il faut noter que cette technique n'évite pas les contraintes et les difficultés qui sont connues et qui sont toujours les mêmes :

- quelles sources d'information prendre pour guider l'arrêt du front (définition du critère d'arrêt) ?
- comment palier à l'intrusion du front dans les *artefacts* du gradient ?
- à un niveau plus général : quel EDP choisir et quel prétraitement effectuer ?

Plus spécifiquement à cette méthode des bulles :

- combien de bulles initialiser ?
- comment distribuer les bulles dans l'image ?

A cette dernière question, Tek et kimia, par exemple, se basent sur le gradient de l'image, auquel cas l'inclusion de toute bulle dans l'image permet d'éviter les zones de contours, c'est à dire celles que l'on recherche.
Les résultats suivants découlent d'une autre approche : le critère d'inclusion de la bulle dans l'image est basé sur le seuillage du produit de l'image par le gradient, plus explicitement :

$$Image(i,j).Gradient(i,j) < seuil$$

On peut remarquer que de cette manière, on définit une fois de plus et implicitement un seuillage de l'image. Mais celui-ci semble inévitable dans la mesure où on ne peut définir des bulles dans les zones de contours (cela

erronerait le résultat de la segmentation) : une définition complètement *isotropique* de l'ensemble des bulles est limité en ce sens par le fait que les bulles possèdent une dimension propre.

Ce qui doit alors inciter à la définition de bulles les plus petites possibles.

- alors, dans ce cas, pourquoi ne pas définir *isotropiquement* des *points* au lieu de bulles ?

La réponse est simple : l'utilisation de la formulation Eulérienne sous entend la donnée d'une carte distance signée. Un point induit une surface paramétrée initiale qui a la forme d'un cône et le front initial est défini par ce point : du point de vue mathématique, on comprend alors que l'évolution de ce point en tant que front soit limitée par l'absence de données *intérieures* au front. De plus, un point dépend directement du voisinage immédiat pour une propagation ultérieure, ce qui favorise un comportement statique.

L'idéal semble donc dans l'utilisation de bulles de la taille d'un masque permettant l'accès aux dérivées secondes, le plus petit possible. Cela donne l'accès au calcul de la courbure (le résultat suivant se base sur des bulles englobant un masque de taille 7).

La distribution des bulles est donc une donnée importante de cette méthode, et la recherche de l'*isotropie* maximale repose en partie sur le résultat escompté (c'est à dire l'information attachée à la segmentation de l'image..) !

Les résultats suivants, bien loin d'une quelconque optimisation (du critère d'arrêt, du nombre de bulles, de leur distribution, etc…), confirment les interrogations sur les limites de la méthode :

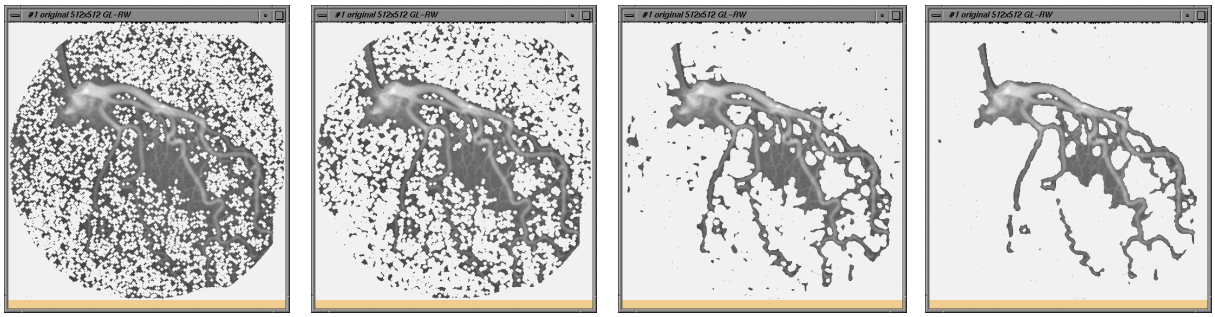


Fig. 35. *Δt = 0.98. $\Delta x = \Delta y$ = 1. Diffusion = 1.5. Réaction = -1.1. TP1 = 10.0. Dim = 0. Dgr =2.5.*
Cette séquence met en évidence les changements topologiques du front, défini à partir de 50000 bulles réparties aléatoirement et répondant au critère de non inclusion dans l'arborescence (voir ci-dessus). On a donc une initialisation *automatique* et presque *isotropique* du front, ce qui est un des avantages principaux de la perspective de segmentation par injection de bulles.
Au final, le front isole la structure arborescente, mais le résultat est bien loin d'une segmentation *parfaite* et illustre les mêmes difficultés que vues précédemment concernant les gradients moyens et faibles.

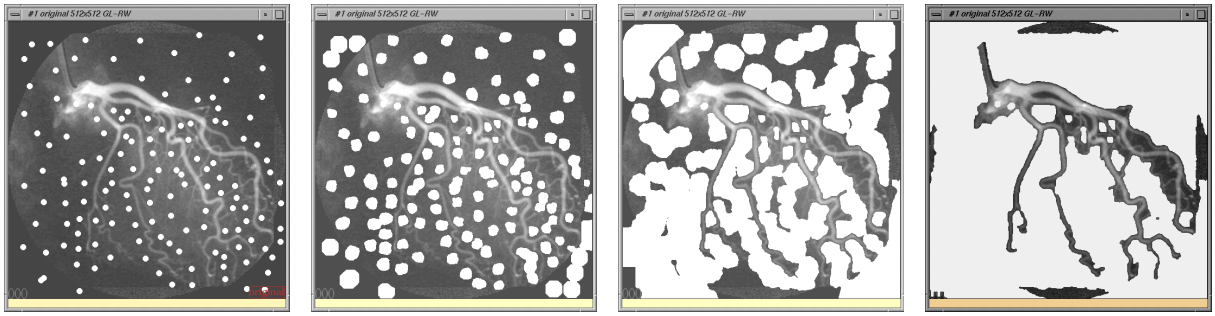


Fig. 36. *Δt = 0.98. $\Delta x = \Delta y$ = 1. Diffusion = 1.5. Réaction = -1.1. TP1 = 10.0. Dim = 0. Dgr =2.0.*
Cette séquence montre des bulles définies par l'utilisateur . La dépendance au gradient est légèrement modifiée. La différence sensible du résultat vient du fait que l'utilisateur a englobé l'arborescence dans un réseau de bulles, ce qui constitue une connaissance a priori des zones à segmenter.

83. Au niveau de l'EDP utilisée et de la méthode appropriée : conclusion.

Tous les résultats précédents ont montré la limite de l'utilisation de propagation de fronts dans un espace de réaction /diffusion.

Cela n'est pas étonnant car un comportement simplement visqueux ne peut pas contourner le problème des *artefacts* et de la distribution effective de l'information dans l'image du gradient. Il n'existe pas à ce titre d'images idéales où un simple seuillage du gradient permettrait de binariser (i.e. segmenter) l'image et d'avoir résolu le problème.

Il faut donc pouvoir enrichir le comportement du front par des combinaisons d'opérateurs mathématiques qui se retrouvent au niveau de l'EDP utilisée.

Or on a montré, outre les changements de topologie qui sont aisés, que ces opérateurs pouvaient être approximés simplement dans le cadre d'une formulation Eulérienne.

En cela, le cadre Eulérien relève d'un cadre idéal pour faire évoluer ces EDP.

Comme on a pu ainsi le constater dans la partie connexion entre modèles déformables et EDP, le *snake* peut être manœuvré facilement grâce aux *courbes de niveaux*.

Les perspectives envisageables, au niveau de la méthode approprié au type d'images utilisées, se situent donc dans l'utilisation d'une EDP, manœuvré dans un cadre Eulérien, qui permet, outre les changements possibles de topologie, de faire abstraction des artefacts dans le gradient (pour cela un comportement de type *snake* est le bienvenu), d'aller jusqu'à l'extrémité des petits vaisseaux (ce qui n'est pas possible avec un forte viscosité ⇔ ce qui est facilité par une viscosité négative), et d'ignorer dans une certaine mesure les faibles gradients (ce qui impose a priori un seuillage et une initialisation aux paramètres)…

Par ailleurs, la disponibilité d'un outil de filtrage de type diffusion anisotropique pour des données brutes pulmonaires 3D est une nécessité. On a vu effectivement les potentialités qui sont offertes.

On a donc affaire à une situation qui n'est pas simple, et ce genre de problèmes, face aux mêmes images, ont par ailleurs déjà trouvé solution dans des méthodes originales (suivi de contour par méthode vectorielle, etc..) qui ont intégré de manière locale une solution aux contraintes posées.

L'accès à une solution globale qui intègre ces mêmes contraintes en se donnant la bonne EDP s'avère donc une perspective possible et souhaitable pour la continuité du stage, même si le type d'images que sont les angiographies pulmonaires peut sembler au niveau structurel beaucoup plus complexe.

En cela, l'accès à une segmentation *juste* (dans le sens où on le résultat de la segmentation ne fait pas apparaître de l'information) de la partie proximale est une perspective tout à fait possible.

Par contre, en ce qui concerne la partie distale constituée de vaisseaux d'ordre supérieur, seuls des essais peuvent viabiliser ou non une telle démarche : les perpectives sont donc plus aléatoires. D'autres méthodes (calculs et comparaison de volumes *du réseau vasculaire* entre patients présentant et ne présentant pas d'embolies) pourraient alors prendre le relais.

En outre, la disponibilité pour une étude statistique d'un grand jeu de données serait la bienvenue pour ces comparaisons volumétriques.

BIBLIOGRAPHIE.

La plupart des documents sont facilement accessibles sur Internet en version *postcript* en se rendant sur le site Web de l'auteur.

[1] J.J. Jacq. (1998)
Eléments de segmentation morphologique.

[2] B.B. Kimia, K. Siddiqi. (1995)
Geometric heat equation and nonlinear diffusion of shapes and images.

[3] B.B. Kimia, H. Tek. (1998)
Curve evolution, wave propagation and mathematical morphology.

[4] B.B. Kimia, H. Tek. (1996)
Volumetric segmentation of medical images by three dimensionnal bubbles

[5] J.A. Sethian, R. Malladi. (1998)
A real time algorithm for medical shape recovery.

[6] J.A. Sethian. (1999)
Numerical algorithms for propagating interfaces : Hamilton Jacobi Equations and Conservations Laws.

[7] J.A. Sethian, S. Osher. (1987)
Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton Jacobi formulations.

[8] J.A. Sethian, R. Malladi, B.C. Vemuri. (1995)
Shape modeling with front propagation : a level set approach.

[9] S. Osher, R. Caflish, B. Merriman. (1998)
Level set methods, with an application to modeling the growth of thin films.

[10] S. Osher, B. Merriman, Peng, Zhao, Kang. (1998)
A PDE based fast local level set method.

[11] R. Kimel, N. Kiryati, A.M. Bruckstein. (1997)
Analysing and synthesizing images by evolving curves with the Osher Sethian method.

[12] J.A. Sethian. (1996)
Level set methods.

[13] J.A. Sethian. (1995)
A fast marching level set method for monotically advancing fronts.

[14] J.A. Sethian, D. Adalsteinsson (1997)
The fast construction of extension velocities in level set methods.

[15] B.B. Kimia, K. Siddiqi. (1996)
A shock grammar for recognition.

[16] V. Caselles, R. Kimmel, G. Sapiro. (1995)
Geodesic active contours.

[17] R. Kimmel, L.D. Cohen. (1996)
Global minimum for active contours models : a minimal path approach.

[18] R. Kimmel, V. Caselles, G. Sapiro, C. Sbert. (1996)
Minimal surfaces : a three dimentional segmentation approach.

[19] N. Paragios, R. Deriche. (1997)
A PDE based level set approach for detection and tracking of moving objects.
[20] F. Lazarus, A. Verroust. (1997)
Level set diagrams of polyhedral objects.
[21] J. Gomes, O. Faugeras. (1999)
Reconciling distance functions and level sets.
[22] N. Paragios, R. Deriche. (1999)
Geodesic active regions for motion estimation and tracking.
[23] N. Paragios, R. Deriche. (1998)
Geodesic active regions for texture segmentation.
[24] G . Hermosillo, O. Faugeras, J. Gomes. (1999)
Cortex unfolding using level set methods.
[25] L. Soler, G. Malandain, H. Delingette. (1998)
Segmentation automatique : application aux angioscanners 3D du foie.
[26] T.D. Aslam. (1998)
A level set algorithm for tracking discontinuities in hyperbolic conservation laws 1 : scalar equations.
[27] C.T. Lin, E. Tadmor. (1999)
High resolution non oscillatory central schemes for Hamilton Jacobi equations.
[28] G. Barles, P.E. Souganidis. (1997)
On the large time behavior of solutions of Hamilton Jacobi equations.
[29] S. Osher, A. Marquina. (1998)
Explicit algorithms for a new time dependent model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise removal.
[30] Bart M. ter H. Romeny. (1996)
Introduction to scale space theory : multiscale geometric image analysis.
[31] P. Perona, T. Shiota, J. Malik. (1995)
Anisotropic diffusion.
[32] R. Deriche, O. Faugeras. (1997)
Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur.
[33] B. B. Kimia, A. R. Tannenbaum, S. W. Zucker. (1994)
Shapes, shocks, and deformations.

BIBLIOGRAPHIE RELATIVE AU P.H.R.C.

[A] Equipe de travail opérant au C.H.U. de Brest. (1997)
Evaluation de la stratégie diagnostique de l'embolie pulmonaire en situation pragmatique.
[B] B. Boyer, P. Dubayle, H. David, P. Goasdoue. (1995)
Embolie pulmonaire : place de la tomodensitométrie spiralée.
[C] D. Revel, Y. Berthezène, M. Amiel. (1997)
Nouvelles techniques d'imagerie.

[D] J. Rémy, M. Rémy-Jardin, D. Arthaud, M. Fribourg. (1998)

Intérêt et limites de l'angioscanographie spiralée dans le diagnostic de l'embolie pulmonaire.

[E] Equipe de travail du département de radiologie, Hôpital Calmette, Lille, France. (1997)

Spiral CT of pulmonary embolism : technical considerations and interpretive pitfalls.

[F] Idem.

Peripheral pulmonary arteries : optimization of the spiral CT acquisition protocol.